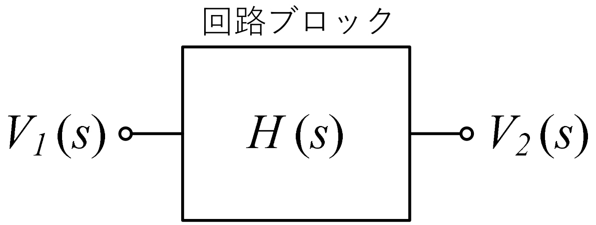
基本事項（２）

伝達関数とボーデ線図

伝達関数

伝達関数 $H(s)$

ラプラス変換した回路方程式から求められる

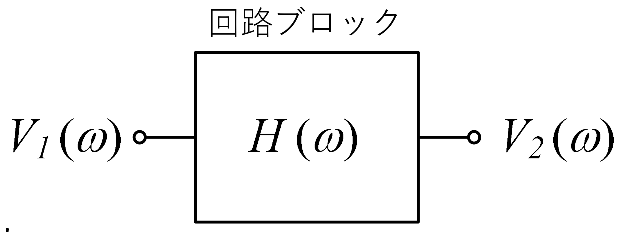


$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$$

$s = j\omega\,(\sigma = 0)$として求めてもよい

周波数領域伝達関数 $H(\omega)$ または周波数特性※

複素ベクトル表記の回路方程式から求められる



$$H(\omega) = \frac{V_2(\omega)}{V_1(\omega)} \quad \text{または} \quad \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)}$$

[NOTE] 回路ブロックの複雑な信号処理を、伝達関数（入力と出力の比）で表す。電子回路では、周波数領域伝達関数も伝達関数と呼ぶことが多い。増幅回路の周波数領域伝達関数は、通常、利得(Gain)または利得の周波数特性と呼ばれる。

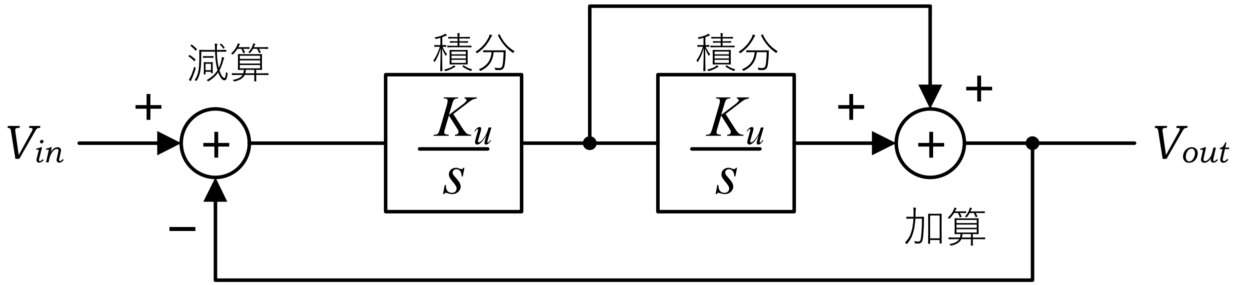
※ 厳密には、周波数fの関数が周波数特性と呼ばれるが、角周波数ωを変数として表してもよい。

ブロック線図（ブロックダイアグラム）

一般的な回路設計のフロー

信号処理アルゴリズム → 伝達関数（s変数, z変数） → ブロックダイアグラム → 各ブロックへの回路割当 → 回路図

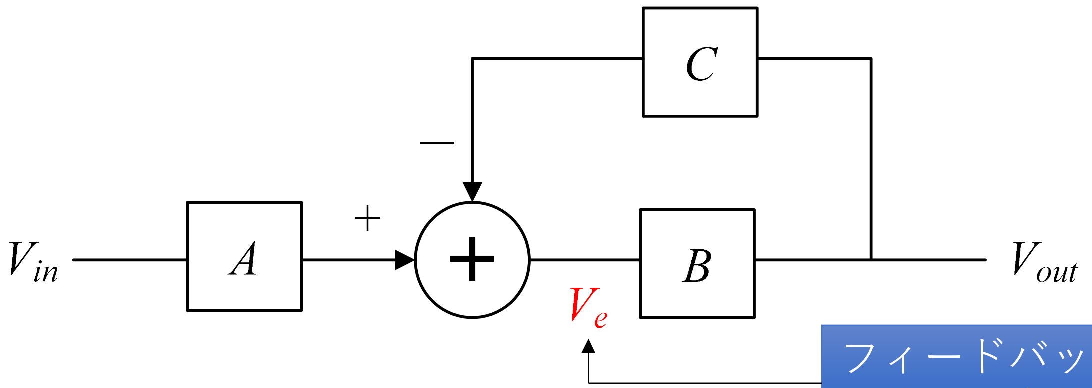
ただし、アナログ回路は、非線形演算を高精度に行うことが難しいため、実現しやすい線形演算（積分、微分、定数倍、加減算）と必要ならコンパレータ（大小比較）、乗算のブロックを組み合わせたブロック線図で処理手順を表現する。



$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{K_u(s + K_u)}{s^2 + K_u s + K_u^2}$$

分子、分母がsのn次多項式になる。

Q1.1 伝達関数$H = V_{out}/V_{in}$ を求めよ。



フィードバックがある場合は、加算器の後ろに変数を置いて式を立てる。

$$\begin{cases} V_e = AV_{in} - CV_{out} \\ V_{out} = BV_e \end{cases}$$

$$V_{out} = ABV_{in} - BCV_{out}$$

$$(1 + BC)V_{out} = ABV_{in}$$

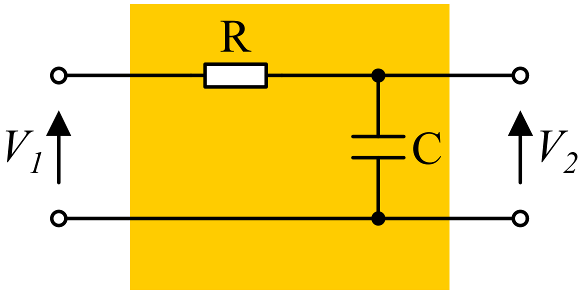
$$H = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{AB}{1 + BC}$$

解答

[NOTE] 複雑な周波数伝達関数は、単純な伝達関数（微分、積分、定数倍など）を部品としたブロックダイアグラムで表される。

周波数特性の計算

[NOTE] コーナ角周波数は、|実部|=|虚部|とすると求められる。



$$H(\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_p} \qquad (\omega_p = 1/CR)$$

1. コーナ角周波数を求める（分子はω_z, 分母はω_pと表記）
2. コーナおよびコーナ前後の伝達関数を調べる

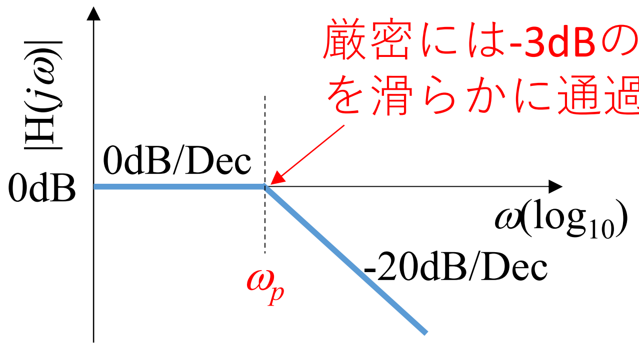
角周波数	周波数伝達関数	振幅 $\lvert H(j\omega)\rvert$	位相 $\angle H(j\omega)$
$\omega < \omega_p$	$H(\omega) \cong 1$ （虚部無視）	$1 = 0\mathrm{dB}$	$0\mathrm{rad}$
$\omega = \omega_p$ (Corner)	$H(\omega) = \frac{1}{1+j} = \frac{1-j}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \cong -3\mathrm{dB}$	$-\frac{\pi}{4}\mathrm{rad}$
$\omega > \omega_p$	$H(\omega) \cong -j\frac{\omega_p}{\omega}$ （実部無視）	$\frac{\omega_p}{\omega} = -20\log_{10}\omega + 20\log_{10}\omega_p(\mathrm{dB})$	$-\frac{\pi}{2}\mathrm{rad}$

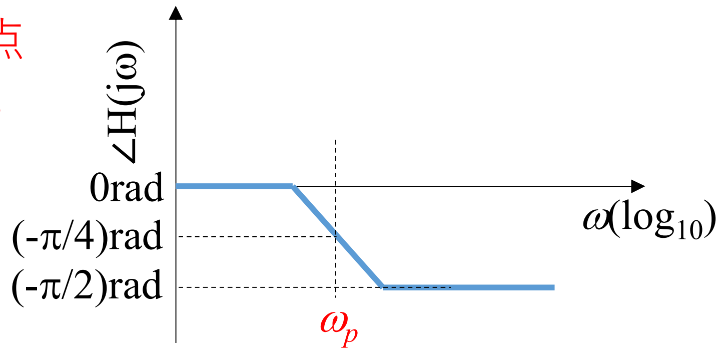
[NOTE] 周波数特性を調べる場合は、分子と分母のωの関数を、$(1 + j\omega/\omega_{z/p})$ で括るように整理すると見通しがよくなる。 コーナω_z, ω_pは、振幅特性の傾きが変化する角周波数を表している。

ボーデ線図の概略（＝折れ線近似）

- 振幅特性
  - 縦軸：絶対値のデシベル表記、横軸：角周波数の対数目盛表記
- 位相特性
  - 縦軸：位相角のradまたはdeg表記、横軸：角周波数の対数目盛表記

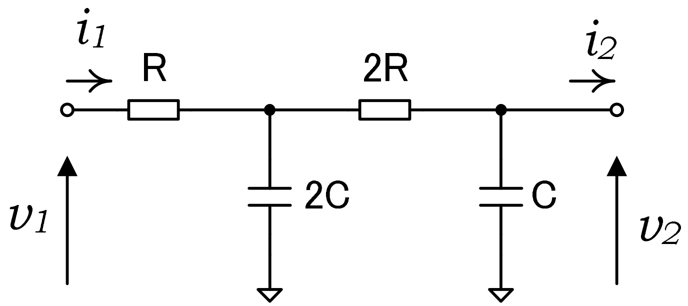
$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_p}$$ （前スライドの回路例では $\omega_p = \frac{1}{CR}$ ）





[NOTE] コーナの角周波数ω_pと各部の振幅特性の傾きを記入すること。

Q1.2 周波数伝達関数のボーデ線図の概略を示せ。



$$\begin{bmatrix}1 & R\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\j\omega 2C & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2R\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\j\omega C & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+j\omega 2CR & R\\j\omega 2C & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+j\omega 2CR & 2R\\j\omega C & 1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}(1+j\omega 2CR)^2+j\omega CR & 2R(1+j\omega 2CR)+R\\j\omega 2C(1+j\omega 2CR)+j\omega C & 1+j\omega 4CR\end{bmatrix}$$

行列を使った計算方法は、「２端子対パラメータ」の項を参照

$$A=1+j\omega 5CR+(j\omega 2CR)^2=(1+j\omega 4CR)(1+j\omega CR)$$

$$\begin{cases}H(\omega)=\dfrac{1}{A}=\dfrac{1}{(1+j\omega 4CR)(1+j\omega CR)}=\dfrac{1}{(1+j\omega/\omega_{p1})(1+j\omega/\omega_{p2})}\\[2ex]\omega_{p1}=\dfrac{1}{4CR}\quad \omega_{p2}=\dfrac{1}{CR}\end{cases}$$

Q1.2の作図

周波数伝達関数

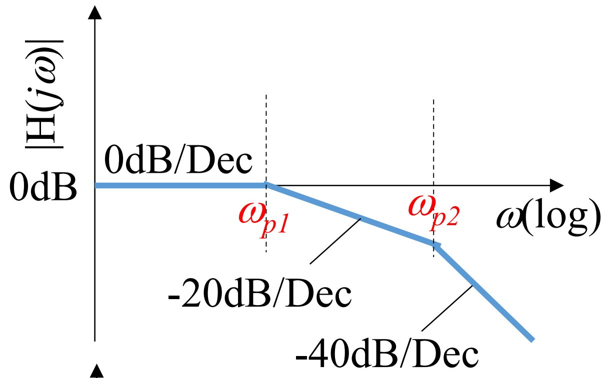
$$H(\omega)=\frac{1}{(1+j\omega/\omega_{p1})(1+j\omega/\omega_{p2})}=\frac{(1-j\omega/\omega_{p1})(1-j\omega/\omega_{p2})}{|1+j\omega/\omega_{p1}|^2|1+j\omega/\omega_{p2}|^2}$$

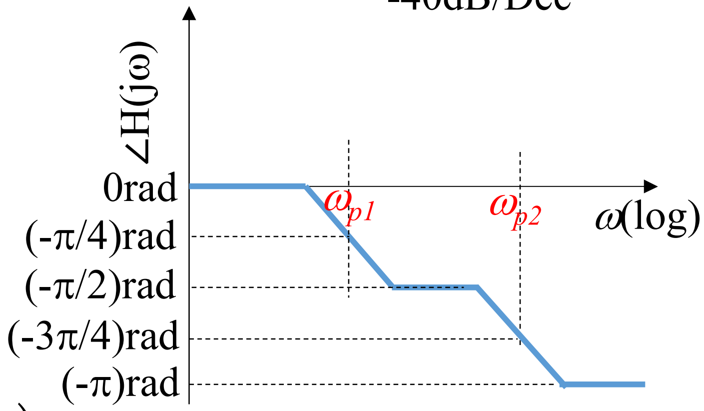
振幅特性 （ω/ω_p= 1 の前後で傾きが変わる）

$$|H(\omega)|=\frac{1}{\left|1+j\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right|\left|1+j\frac{\omega}{\omega_{p2}}\right|}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right)^2}\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_{p2}}\right)^2}}$$

位相特性 （ ω/ω_p= 1 の前後で位相が+π/2または-π.2変化する）

$$\angle H(\omega)=\arctan\left(\frac{-\omega}{\omega_{p1}}\right)+\arctan\left(\frac{-\omega}{\omega_{p2}}\right)=-\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right)-\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_{p2}}\right)$$





$$\omega_{p1}=\frac{1}{4CR}\qquad\omega_{p2}=\frac{1}{CR}$$

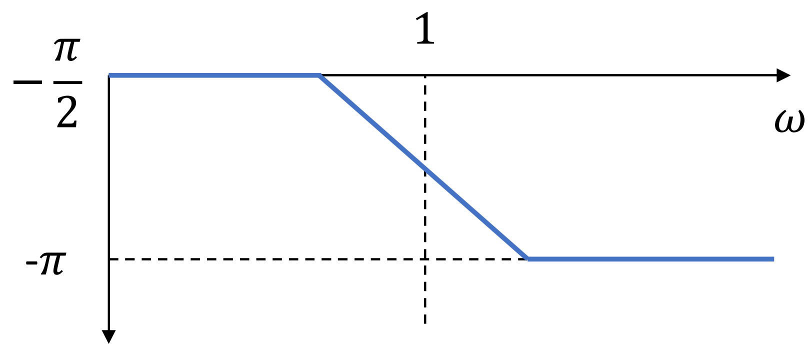
[NOTE] 振幅と位相がすぐに計算できるようにしておくこと。

位相の計算に関する注意点

下記のような周波数伝達関数の位相のボーデ線図はどのようになるか考えてみよう。

$$H(\omega) = -\frac{1}{\omega^2 - j\omega} = -\frac{\omega^2 + j\omega}{\omega^4 + \omega^2}$$

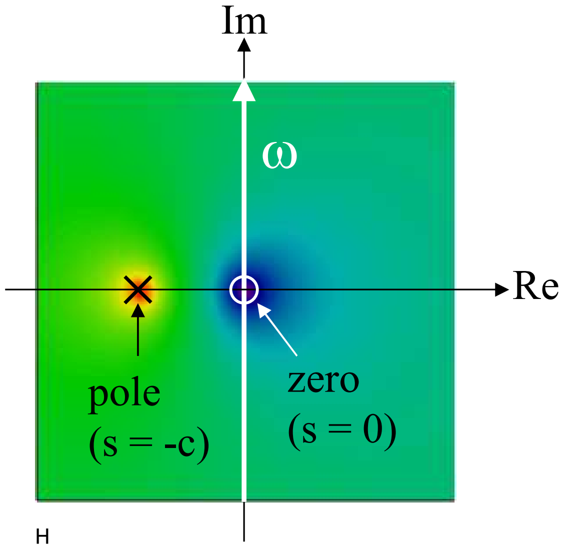
$$\angle H(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{\omega}\right) - \pi$$

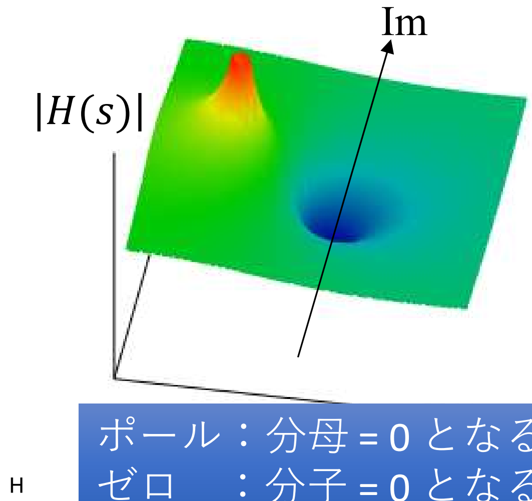


1. 素直に解けば上記のようになるが、$\omega = 0$で位相が$-\pi/2$というのは奇異に感じるかもしれない（直流の位相？）。$\omega = 0$の位相は、直流の位相ではなく、$\omega \to 0$のときの漸近値を表している。
2. arctanは変数に対して複数の値を持っているので注意。第2象限のベクトルは、$+\pi/2$ または $-3\pi/2$、第3象限のベクトルは$+\pi$または $-\pi$、第４象限のベクトルは$+3\pi/2$ または $-\pi/2$を加えることを忘れないように。

ラプラス変数sと周波数特性

$$s = \sigma + j\omega \qquad H(s) = \frac{a \cdot s}{s + c}$$ の例





ポール：分母＝0 となるsの値（×で表す）
ゼロ　：分子＝0 となるsの値（○で表す）

[NOTE] s平面の虚数軸が周波数軸となる。分子または分母の関数が高次の伝達関数の周波数特性は、s平面上で考えると理解しやすいが、詳しくは信号処理または制御理論を学ぶ必要があるので、とりあえず、ポールとゼロの性質だけ把握しておこう。

線型回路の伝達関数

- 線形回路の伝達関数は、分母、分子がラプラス変数sのn次多項式（実数係数）で表される。

$$H(s)=\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}=A\frac{(s+a_n)(s+b_n)(s^2+c_ns+d_n)\cdots}{(s+a_d)(s+b_d)(s^2+c_ds+d_d)\cdots}$$

- 変数s（複素数）のn次多項式は、1次式または2次式に因数分解できるので※、sの1次式と2次式の性質を理解しておけばよい。

ポール
$$-a_n,-b_n,\frac{-c_n\pm\sqrt{c_n^2-4d_n}}{2},\cdots$$

ゼロ
$$-a_d,-b_d,\frac{-c_d\pm\sqrt{c_d^2-4d_d}}{2},\cdots$$

周波数特性は？

※ 詳しくは「高次の伝達関数の周波数応答の計算法」の説明資料を参照

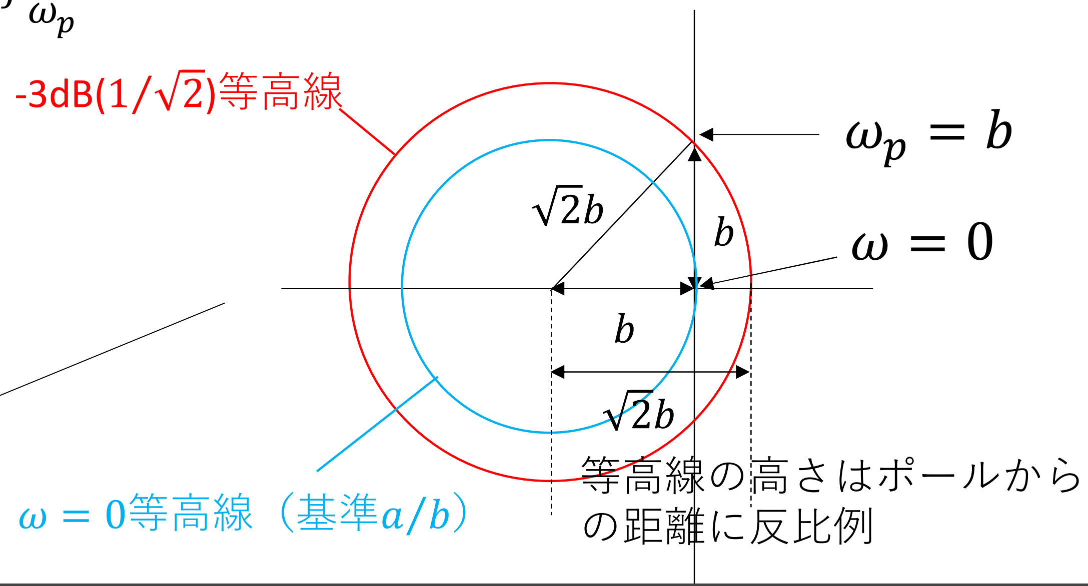
1次伝達関数のポールとゼロ

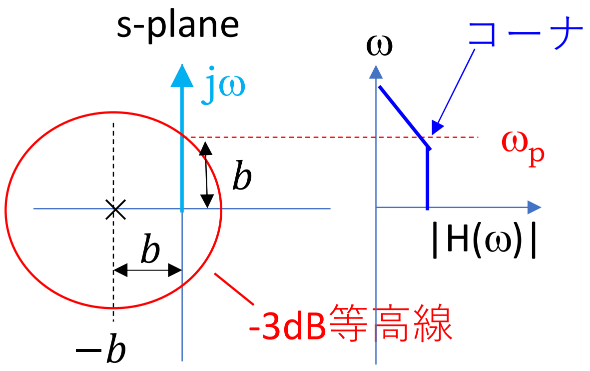
ボード線図にコーナが発生する原因は、s平面上にポール(H = ∞)とゼロ(H = 0)が存在するためである。

$$H(s) = \frac{a}{s+b} \xrightarrow{s=j\omega} \frac{\frac{a}{b}}{1+j\frac{\omega}{b}} = \frac{\frac{a}{b}}{1+j\frac{\omega}{\omega_p}}$$

LPFの伝達関数の例（分子が定数）

ポール	$s_p = -b$
ゼロ	この例では発生しない





[NOTE] 1次の因数により、実数軸上にポールまたはゼロが1個現れる。ポールの値は角周波数と等しい。

LPFとHPF

LPFの伝達関数の例

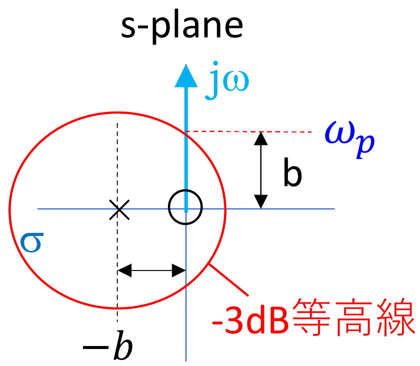
$$H(s)=\frac{a}{s+b}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{s}{b}+1}$$

$\frac{s}{b}\rightarrow\frac{b}{s}$に置き換える

HPFの伝達関数の例

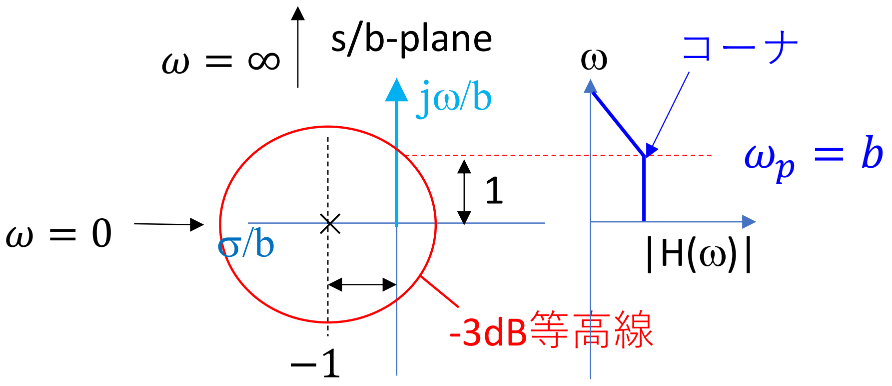
$$H(s)=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{s}+1}=\frac{\frac{a}{b}s}{s+b}$$

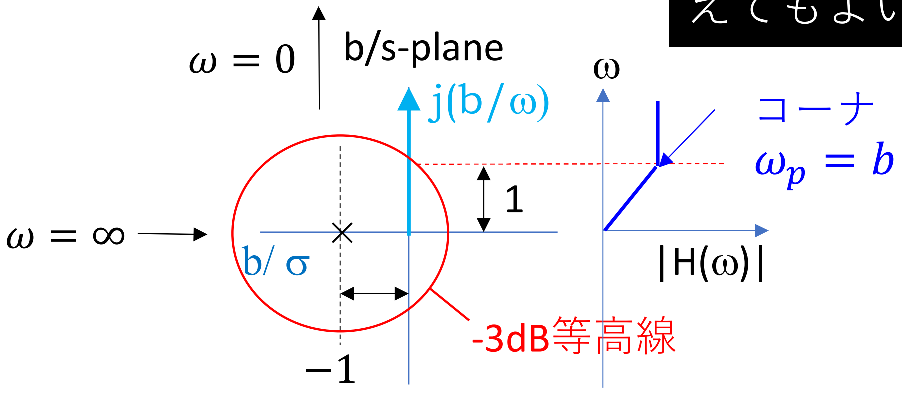
（分子が1次）



	LPF	HPF
ポール	$s_p=-b$	$s_p=-b$
ゼロ	なし	$s_z=0$

[NOTE] $\omega\rightarrow0$で$H(s)=0$, $\omega\rightarrow\infty$でポールとゼロが打ち消し合うと考えてもよい。





[NOTE] 軸をω_pで規格化して逆数にするとLPF特性がHPF特性に変換される。

2次の伝達関数と周波数特性

分母のラプラス変数sが2次の伝達関数を用いると、LPF(Low Pass Filter)、HPF(High Pass Filter)の他にBPF(Band Pass Filter)、BRF(Band Reject Filter)なども作れるため、試験では2次の伝達関数がよく出題される。*H*(ω)を無理に$j\omega$の1次関数に因数分解しようとするとややこしくなるので注意。

LPFの伝達関数

$$H(s)=\frac{\omega_0^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}\xrightarrow{s=j\omega}\frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)+j\omega\frac{\omega_0}{Q}}$$

分子が0次

BPFの伝達関数

$$H(s)=\frac{\frac{\omega_0}{Q}s}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}\xrightarrow{s=j\omega}\frac{j\omega\frac{\omega_0}{Q}}{(\omega_0^2-\omega^2)+j\omega\frac{\omega_0}{Q}}$$

分子が1次

HPFの伝達関数

$$H(s)=\frac{s^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}\xrightarrow{s=j\omega}\frac{-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)+j\omega\frac{\omega_0}{Q}}$$

分子が2次

BRFの伝達関数

$$H(s)=\frac{s^2+\omega_0^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}\xrightarrow{s=j\omega}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)+j\omega\frac{\omega_0}{Q}}$$

分子が2次と0次

2次伝達関数のポールとゼロ

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

LPFの伝達関数の例

[NOTE] 定数項をω_0^2, 1次の係数をω_0/Qと置くのは、LCR回路に由来する（Q2参照）。

ポール

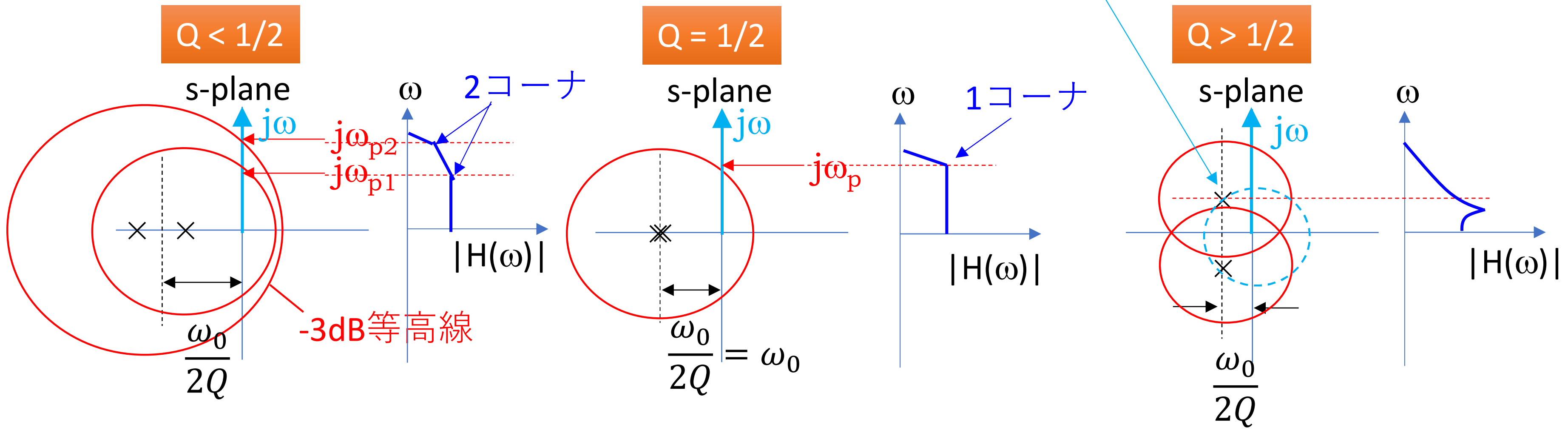
$$s_p = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}$$

2実数、1実数（重解）、2複素数によって特性が異なる。

ゼロ

この例では発生しない

$|s_p| = \omega_0$ より、ポールは半径ω_0の円上に発生



2次のBPFとHPF

BPFの伝達関数の例

$$H(s) = \frac{\frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

ポール $s_p = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}$

ゼロ $s_z = 0$

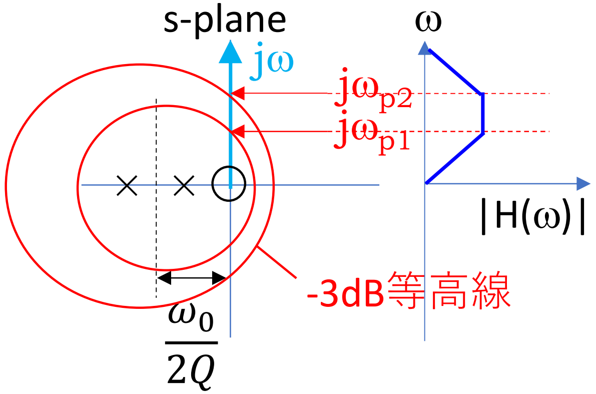
HPFの伝達関数の例

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

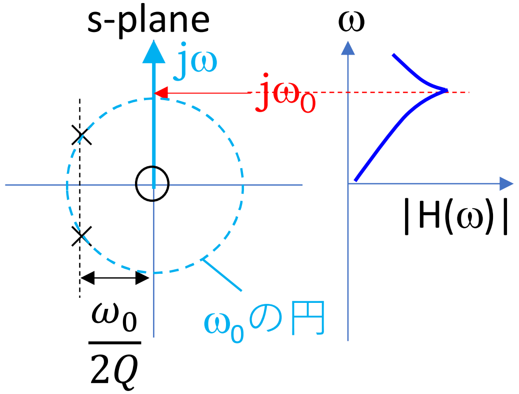
ポール $s_p = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}$

ゼロ $s_z = 0$ （2重解）

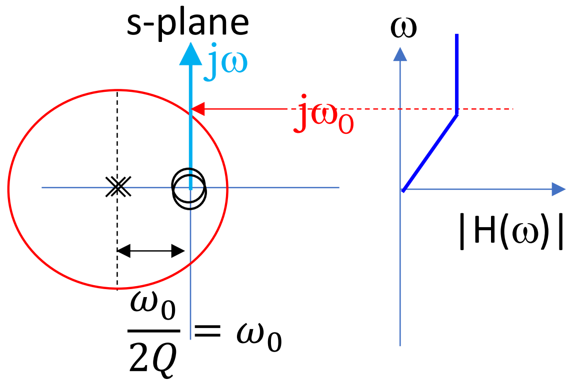
Q < 1/2



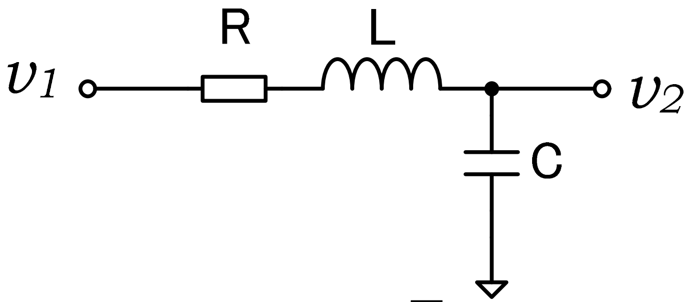
Q > 1/2



Q = 1/2



Q2. $R^2C^2 = 4LC$のとき、周波数伝達関数の振幅特性のボード線図を示せ。



$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{(1-\omega^2 LC) + j\omega CR} = \frac{\frac{1}{LC}}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) + j\omega\frac{R}{L}}$$

共振回路の共振周波数ω_0とQ値を用いて書き直すと、

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{LC}}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) + j\omega\frac{R}{L}} = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\frac{\omega_0}{Q}}$$

$$R^2C^2 = 4LC \Rightarrow Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2}$$

LPFの周波数伝達関数の形になることが分かる。また、Q = 1/2 より、ポールが2重解（コーナが1個）である。

[NOTE] ここでは、Qを求めて、1/2より大きいかどうかを調べたが、伝達関数の形を忘れたときは、ラプラス変数の伝達関数H(s)のポールを求め、判別式よりポールが実数または複素数になる条件で周波数特性が判定できる。

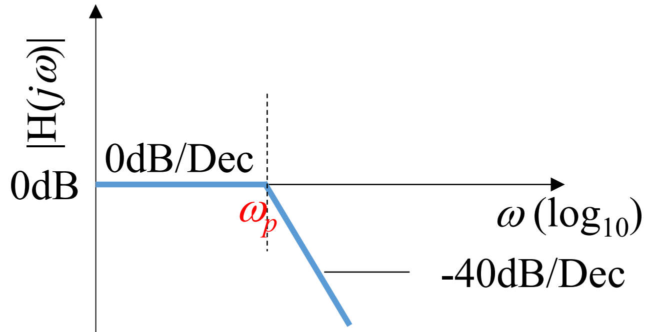
Q2の作図

Q = ½のとき、$H(\omega) = \dfrac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\dfrac{\omega_0}{Q}} = \dfrac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega 2\omega_0} = \dfrac{\omega_0^2}{(\omega_0 + j\omega)^2} = \dfrac{1}{(1 + j\omega/\omega_0)^2}$

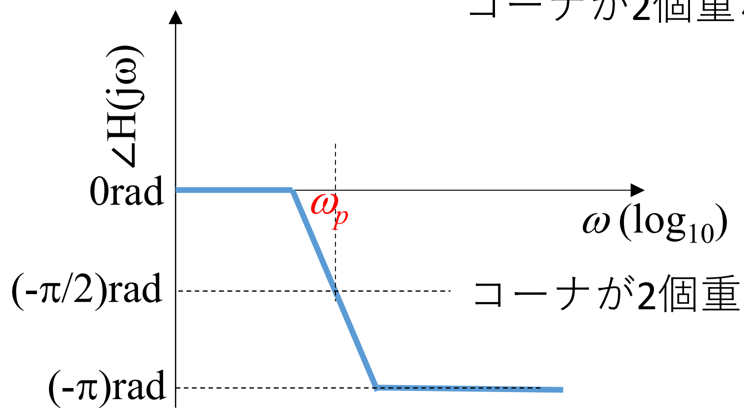
コーナ角周波数を求める。

$R^2C^2 = 4LC$　より、

$\omega_p = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ または $\dfrac{R}{2L}$



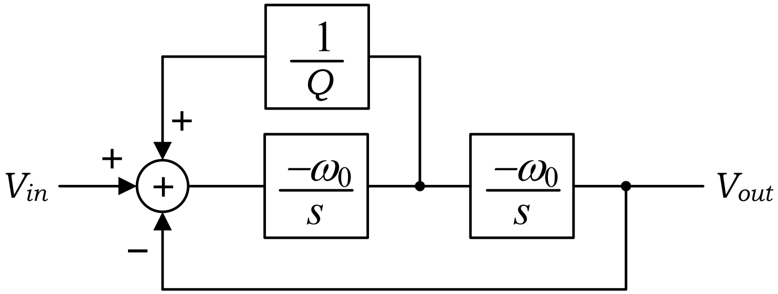
コーナが2個重なっているため傾きが-40dB/Dec



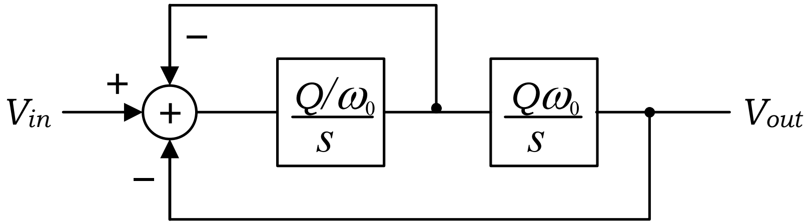
コーナが2個重なっているため位相変化が-π

練習問題 1

下記のブロック線図の伝達関数（s変数）と周波数特性（ω変数）を求め、$Q = 1/2, Q < 1/2, Q > 1/2$の各場合についてボーデ線図（振幅と位相）を作成せよ。

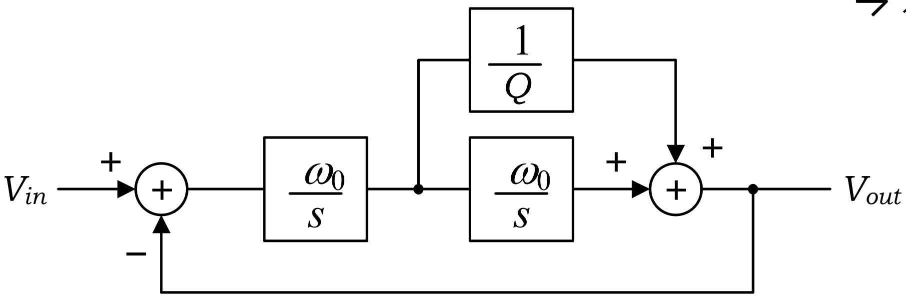


（ヒント）$H(s) = \dfrac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$



（ヒント）$H(s) = \dfrac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$

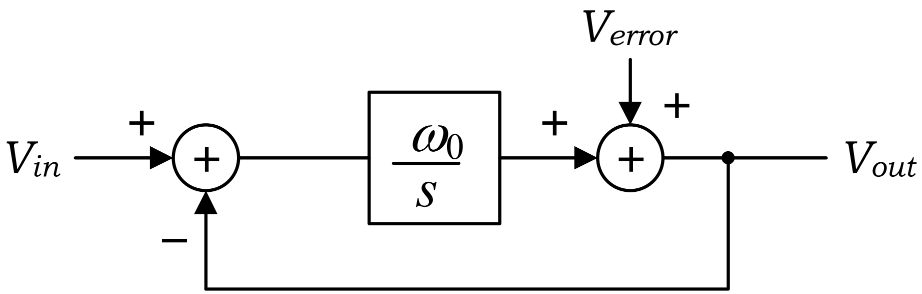
→ 左の回路と同じ伝達関数になることを確認しよう。



（ヒント）$H(s) = \dfrac{\omega_0(s + Q\omega_0)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$

練習問題 2

下記のブロック線図のV_{out}を$V_{in}, V_{error}, \omega_0, s$で表せ。また、$V_{out}/V_{in}\ (V_{error}=0)$と$V_{out}/V_{error}(V_{in}=0)$周波数特性（$\omega$変数）を求め、ボード線図を作成せよ。



（ヒント）　$V_{out} = \dfrac{\omega_0}{s+\omega_0}V_{in} + \dfrac{s}{s+\omega_0}V_{error}$