

# 第3章 伝達関数とブロックダイアグラム

関数と行列による回路の表記

# 回路の関数表現

- ブロックダイアグラムの各ブロックの機能は、入力信号と出力信号の関係によって表される
  - 関数：伝達関数
  - 演算子：加減算、乗算
  - 行列：2端子対行列

ラプラス変換による回路解析

## 3.1 回路の過渡応答と定常応答

# (復習)ラプラス変換の定義

実変数 $t$ の関数から、複素変数 $s = \sigma + j\omega$ の関数への変換

**ラプラス変換**  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

↑  
注意

**逆ラプラス変換**  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$

いちいち複素積分を行うのは面倒なので、次ページの表を使用する。

# ラプラス変換表と重要な性質

## 代表的な関数の変換

| 時間変数                    | s変数                      | 時間変数                          | s変数                                            |
|-------------------------|--------------------------|-------------------------------|------------------------------------------------|
| $u(t), 1$               | $\frac{1}{s}$            | $\cos \omega t$               | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$                     |
| $t$                     | $\frac{1}{s^2}$          | $\sin \omega t$               | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$                |
| $e^{\pm \alpha t}$      | $\frac{1}{s \mp \alpha}$ | $e^{-\alpha t} \cos \omega t$ | $\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$ |
| $e^{\pm \alpha t} f(t)$ | $F(s \mp \alpha)$        | $e^{-\alpha t} \sin \omega t$ | $\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$     |

## 重要な性質

$$af(t) + bg(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} aF(s) + bG(s)$$

(線形性)

$$f(t - \alpha) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} e^{-\alpha s} F(s)$$

(時間推移)

$$\int_0^t f(t - \tau) x(\tau) d\tau \rightleftharpoons F(s)X(s)$$

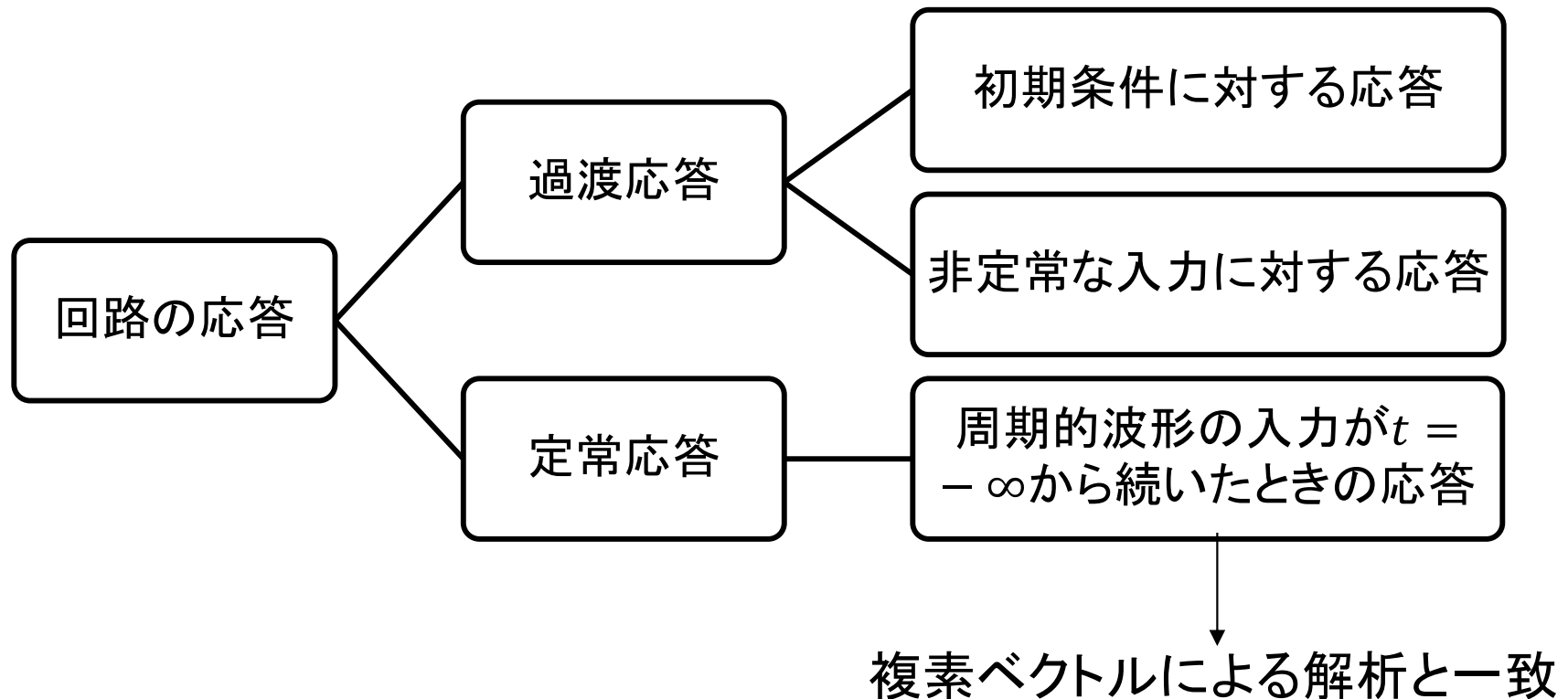
(たたみ込み積分)

# 電流-電圧特性のラプラス変換

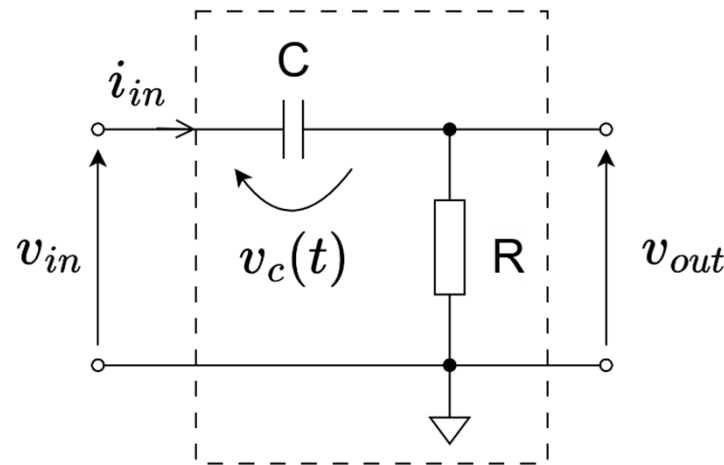
| デバイス        | 時間変数電流-電圧特性                                 | s変数電流-電圧特性                                  |
|-------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 抵抗 $R$      | $v(t) = R \cdot i(t)$                       | $V(s) = R \cdot I(s)$                       |
| インダクタンス $L$ | $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$                 | $V(s) = sL \cdot I(s) - Li(0)$              |
| キャパシタンス $C$ | $v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$ | $V(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{v(0)}{s}$ |

初期条件の項を消して、 $s = j\omega$  とすると係数が複素インピーダンスと同じになることに注意。

# ラプラス変換による回路解析



# 回路方程式のラプラス変換の例



$$v_{in}(t) = \frac{1}{C} \int_0^{\infty} i_{in}(t) dt + R i_{in}(t)$$

$$v_{out}(t) = R i_{in}(t)$$

↓  $\mathcal{L}$  (初期値が、 $v_c(t=0) = 0$  の場合)

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{IN}(s) = \frac{I_{IN}(s)}{sC} + \frac{v_c(t=0)}{s} + R I_{IN}(s) = \left( \frac{1}{sC} + R \right) I_{IN}(s) \\ V_{OUT}(s) = R I_{IN}(s) \end{array} \right.$$

複素ベクトルの計算  
と同じ結果になる

$$V_{OUT}(s) = \frac{R}{\frac{1}{sC} + R} V_{IN}(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{CR}} V_{IN}(s) \xrightarrow{s=j\omega} V_{OUT}(j\omega) = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} V_{IN}(j\omega)$$

# 初期値に対する過渡応答

初期値が0ではない場合について考えてみよう。

$$\begin{cases} V_{IN}(s) = \frac{I_{IN}(s)}{sC} + \frac{v_c(t=0)}{s} + RI_{IN}(s) = \left( \frac{1}{sC} + R \right) I_{IN}(s) + \frac{v_c(t=0)}{s} \\ V_{OUT}(s) = RI_{IN}(s) \end{cases}$$

$$I_{IN}(s) = \frac{V_{IN}(s)}{\frac{1}{sC} + R} - \frac{v(t=0)}{\frac{1}{C} + sR}$$

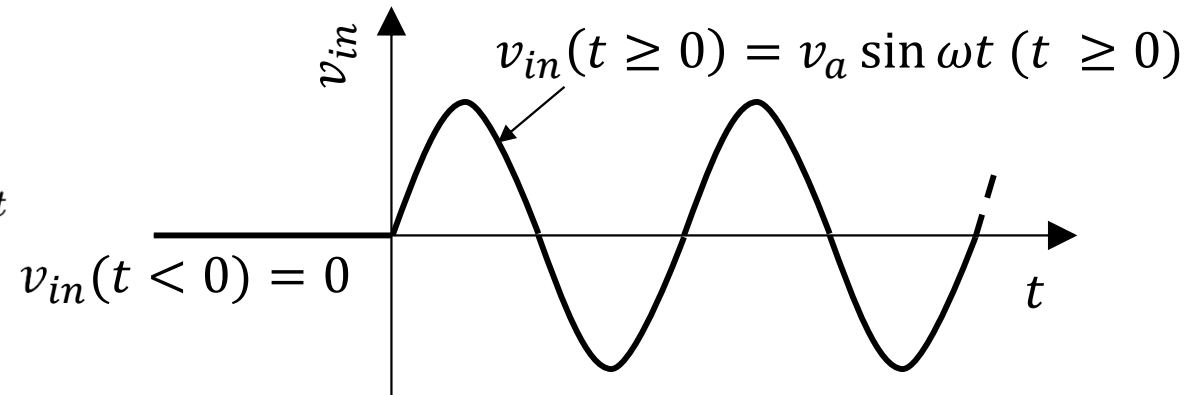
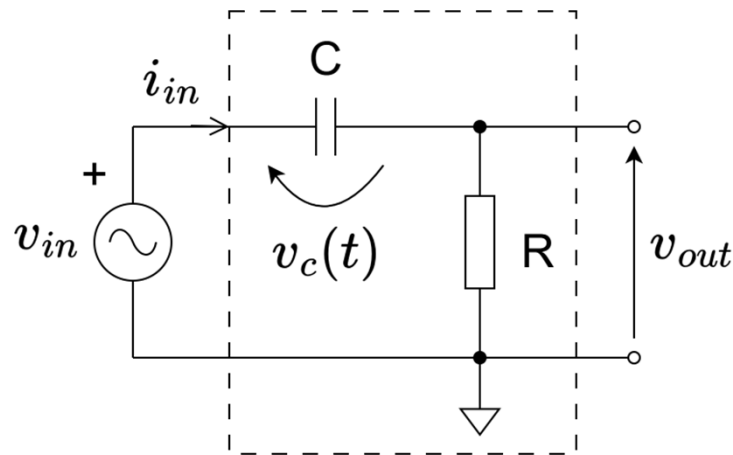
初期値により発生する過渡応答

$$V_{OUT}(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{CR}} V_{IN}(s) - \frac{1}{s + \frac{1}{CR}} v_c(t=0) \leftarrow V_{IN} \text{と} v_c(0) \text{の応答の重ね合わせ}$$

伝達関数  
(後述)

初期値をゼロとすると、この項が消えて入力信号に対する応答だけ(伝達関数)を求めることができる。

# 入力信号に対する応答(1)



$v_c$ の初期値が0の場合を考える  $\Rightarrow v_c(0) = 0$

$$V_{OUT}(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{CR}} V_{IN}(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{CR}} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} v_a$$

$$= \frac{\omega CR}{(\omega CR)^2 + 1} \left\{ \frac{-1}{s + \frac{1}{CR}} + \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{(\omega CR)\omega}{s^2 + \omega^2} \right\} v_a$$

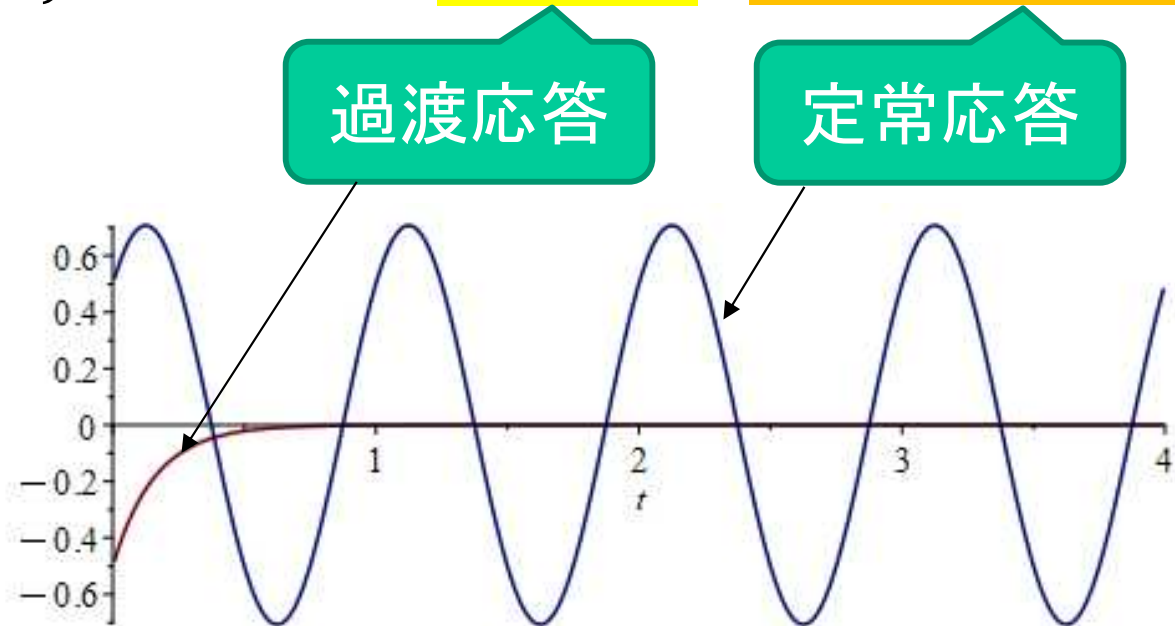
← 分母に $s^3$ の項が出ないように1次の項と2次の項に分解。式変形テクニックは電気回路で学ぼう

# 入力信号に対する応答(2)

式が簡単になる  $1/CR = \omega$  の場合を考えてみよう。

$$V_2(s) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{s + \omega} + \frac{s + \omega}{s^2 + \omega^2} \right\} v_a \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} v_2(t) = -\frac{v_a}{2} e^{-\omega t} + \frac{v_a}{2} (\cos \omega t + \sin \omega t)$$

初期値をゼロとしても、  
入力波形が変化すれば  
過渡応答が発生すること  
に注意。(i.e.最初から定  
常状態となるためには、  
適切な初期値が必要。)



ラプラス変換により、過渡応答と定常応答 ( $t = -\infty$ から入力を始めた場合)の重ね合わせが得られる。

# $j\omega$ による解析とラプラス変換

- 複素ベクトルによる解析
  - 角周波数 $\omega$ の正弦波に対する定常解( $t = -\infty$ から同じ波形が入力されているときの解)が得られる。
  - ラプラス変換された回路方程式で、初期条件 = 0 で  $s = j\omega$  ( $\sigma = 0$ ) とすると複素ベクトルによる解析と同じ結果が得られる
- ラプラス変換による解析
  - 入力信号に対する応答と初期値に対する応答の重ね合わせが得られる (スライド6の例)
  - 全ての初期値 = 0 とすると、入力波形の変化に対する過渡応答と定常応答の重ね合わせが得られる

## 3.1節のまとめ

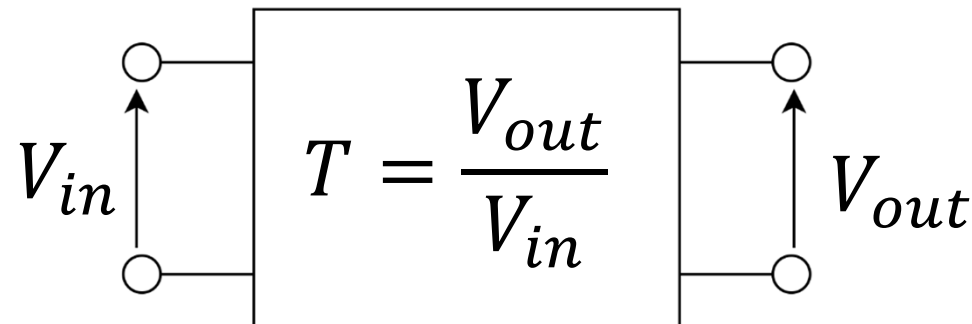
- ラプラス変換により、 $s$ 変数の回路方程式を解くことにより、回路の過渡応答と定常応答の重ね合わせを求めることができる。
- 過渡応答は、回路内部の初期値および入力波形の変化により発生する。
- 初期値を全て0にすると、入力信号に対する過渡応答と定常応答の重ね合わせが求められる
- 複素ベクトル解析の結果は、ラプラス変換の定常応答と同じになる

回路の関数表記

## 3.2 伝達関数

# 伝達関数 (Transfer function)

入力信号(電流または電圧)と出力信号(電流または電圧)の関係を伝達関数 $T$ で表す。



- 回路ブロックの具体的な内部回路を知らなくても、機能や特性を伝達関数で表すことができる。
- 伝達関数は、時間変数の回路方程式(微分、積分方程式)からは求められない。しかし、 $s$ または $\omega$ 変数の回路方程式から求められる。
- 伝達関数は、信号処理内容(計算手順)を表している(詳しくは信号処理または制御理論の科目で学ぼう)。

# s領域と周波数領域の伝達関数

- 伝達関数は、回路方程式をラプラス変換することによりs変数(s領域)の代数方程式として求められる(時間変数のままでは求められない)
- $s = j\omega$  ( $\sigma = 0$ )とすると、周波数領域の伝達関数(Frequency domain transfer function)が求められる
  - 周波数領域の伝達関数は、周波数応答(Frequency response)または周波数特性とも言う

伝達関数(s変数)

$$T(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}$$

s平面上で定義される  
(値は複素数)

伝達関数( $\omega$ 変数)

$$T(j\omega) = \frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)}$$

$\omega$ 軸上で定義される  
(値は複素数)

s変数の伝達関数により、回路の周波数特性と安定性を調べることができる。また、各種回路を統一的に扱える(Z変換)。

# LTIシステム

LTIシステム(Linear time-invariant system) であれば、伝達関数が求められる(十分条件)・・・詳細は信号処理で学ぼう。

## LTIシステムの条件

1. 線形性(線形回路)
2. 時間不変性(回路定数が不変)



回路ブロックを伝達関数で表すためには、LTIの部分をブロックにまとめ、乗算や機能を切り替えるスイッチなどは別ブロックにする。

第1章スライド8の例

LTI: 低雑音増幅器、電力増幅器、LPF、ADC、DAC、PLL

非LTI: ミキサー

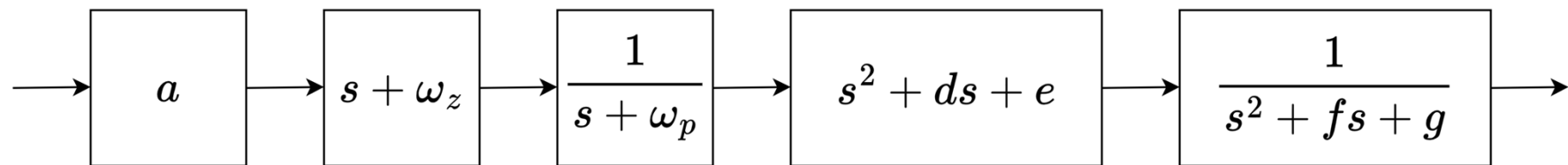
# 伝達関数の因数分解

線形回路の一般的な伝達関数の形

$$T(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = a \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s^1 + b_0}{c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \dots + c_1 s^1 + c_0} \quad (a, \{b_i\}, \{c_i\} \text{は実数})$$
$$= a \frac{(s + \omega_z)(s^2 + ds + e) \dots}{(s + \omega_p)(s^2 + fs + g) \dots} \quad (a, \omega_z, \omega_p, d, e, f, g \text{は実数})$$



分子と分母は実数係数の1次関数または2次関数に因数分解できる。  
高次の伝達関数は、因数のブロックの縦続接続で表せる。

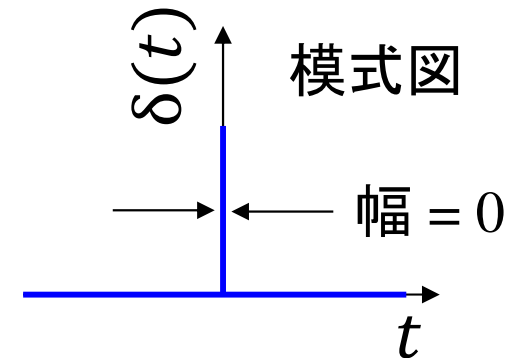


**$s$ の1次関数と2次関数の性質を理解しておけばよい。**

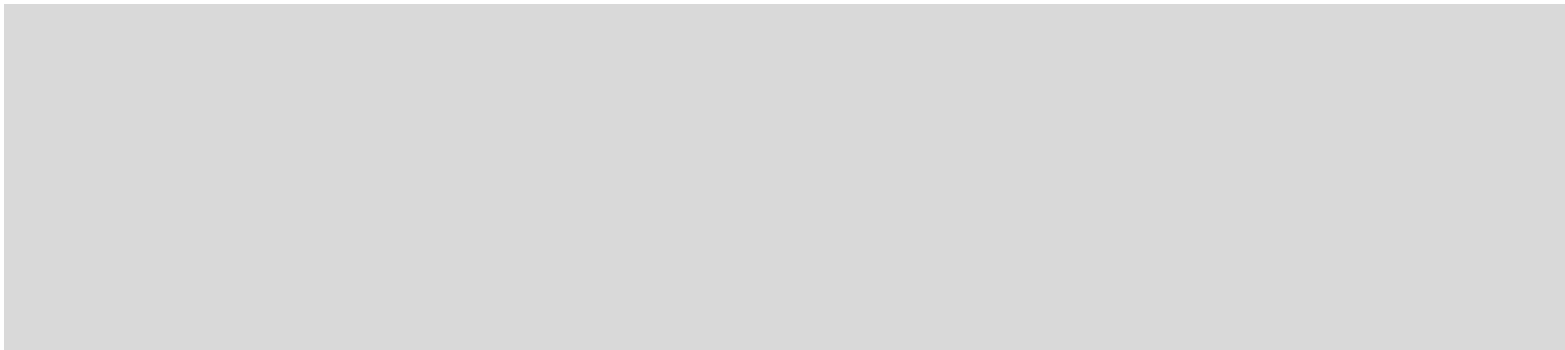
# クイズ1

1. デルタ関数のラプラス変換を求めよ。デルタ関数は、以下の性質をもつ関数である。

$$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



2. デルタ関数を入力したときの出力信号(**インパルス応答**)が、伝達関数の逆ラプラス変換であることを示せ。



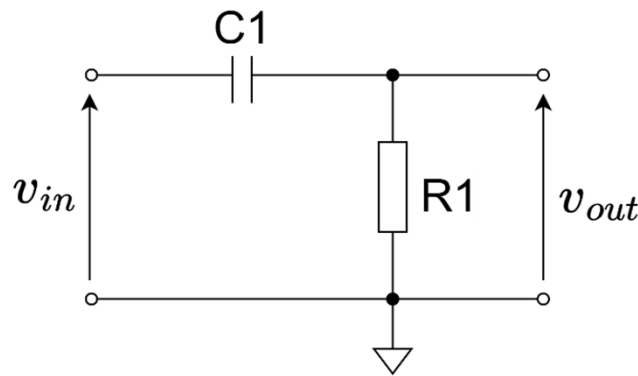
# 課題3. 1

1. インパルス応答が $h(t)$ で表される回路がLTIシステムの条件(十分条件)を満たすとき、一般の入力波形 $v_{in}(t)$ に対する応答が下記のように表されることを示せ。

$$v_{out}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) v_{in}(\tau) d\tau \quad (\text{たたみ込み積分})$$

## 課題3. 2(1)

1. 下記の回路について、 $C1 = 1\mu F$ ,  $R1 = 1k\Omega$ のときの伝達関数を求めよ。



2. 次頁の回路図を参考に、RC回路と伝達関数の出力をシミュレーションにより求め、波形が一致するか確認せよ。ただし、 $C1$ の初期電圧は0Vとし、入力波形は、スライド9の波形とする。

- (参考)初期値を指定(.icディレクティブを使用)しない場合は、各素子の初期電圧は、直流電圧の値となる。V1が直流電圧0の正弦波の場合、 $C1$ ,  $R2$ ともに直流電圧は0Vとなる(初期値はない)。

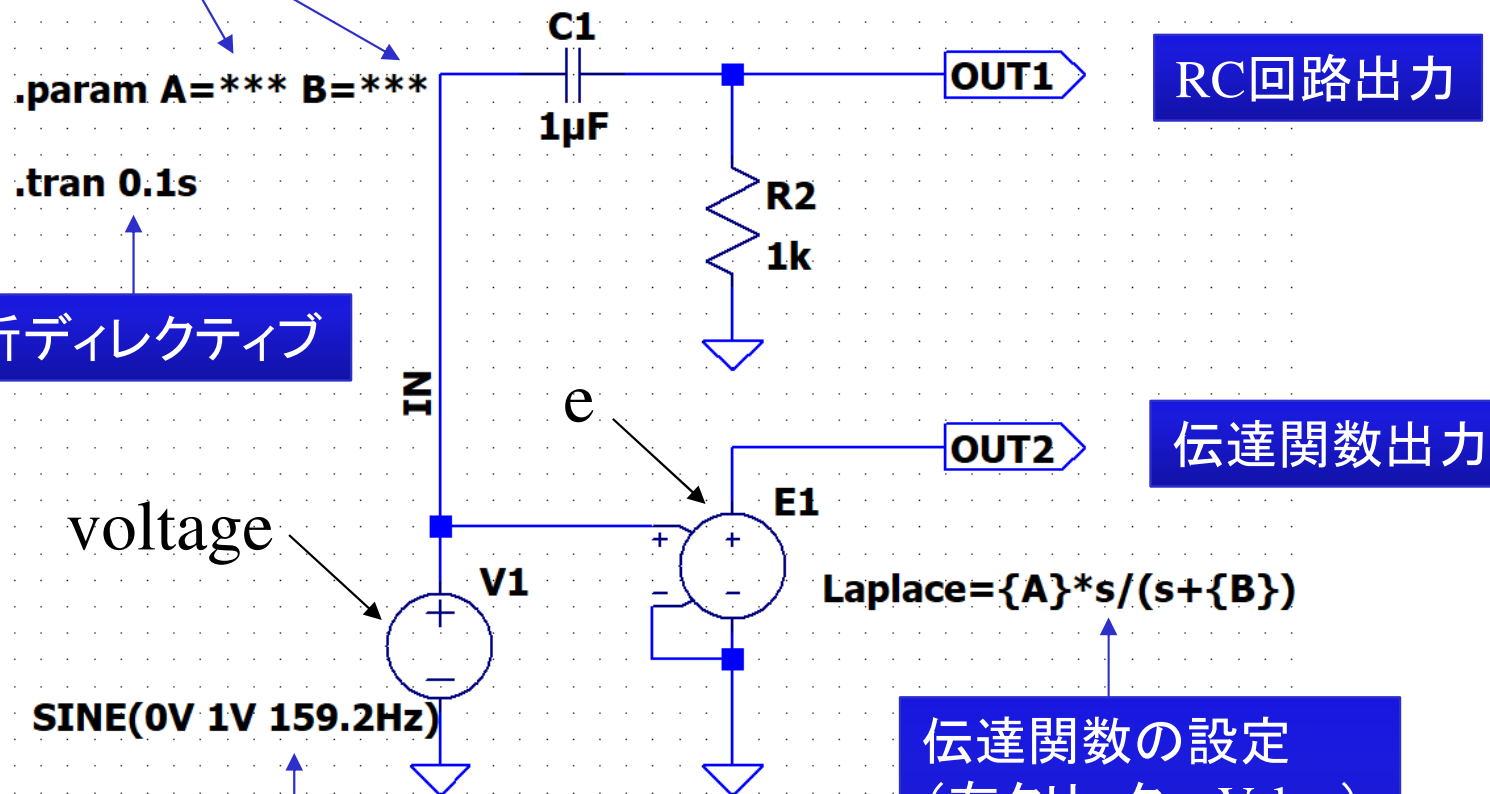
# 課題3. 2(2)

\*\*\*に問1で求めた値を代入

.param A=\*\*\* B=\*\*\*

.tran 0.1s

過渡応答解析ディレクティブ



RC回路出力

伝達関数出力

voltage

SINE(0V 1V 159.2Hz)

Laplace={A}\*s/(s+{B})

Function = SINE  
DC offset, Amplitude, Frequencyを設定

伝達関数の設定  
(右クリック→Value)  
$$Laplace = \frac{\{A\}s}{s + \{B\}}$$
  
{}は変数を表す

## 3. 2節のまとめ

- LTIシステムの条件を満たす回路の特性は、伝達関数で表すことができる
  - 伝達関数は、出力信号( $s$ 変数)/入力信号( $s$ 変数)で定義される
  - 伝達関数は、ラプラス変換された回路方程式において初期条件をゼロとする(入力信号に対する応答のみを取り出す)ことにより求められる
  - 伝達関数の変数を $s = j\omega$ とすると、周波数応答(周波数領域の伝達関数)が求められる
- ラプラス変換したインパルス応答は、伝達関数と等しい
  - インパルス応答から任意の波形に対する応答が求められる(信号処理)

回路の周波数特性とボーデ線図

## 3.3 周波数特性

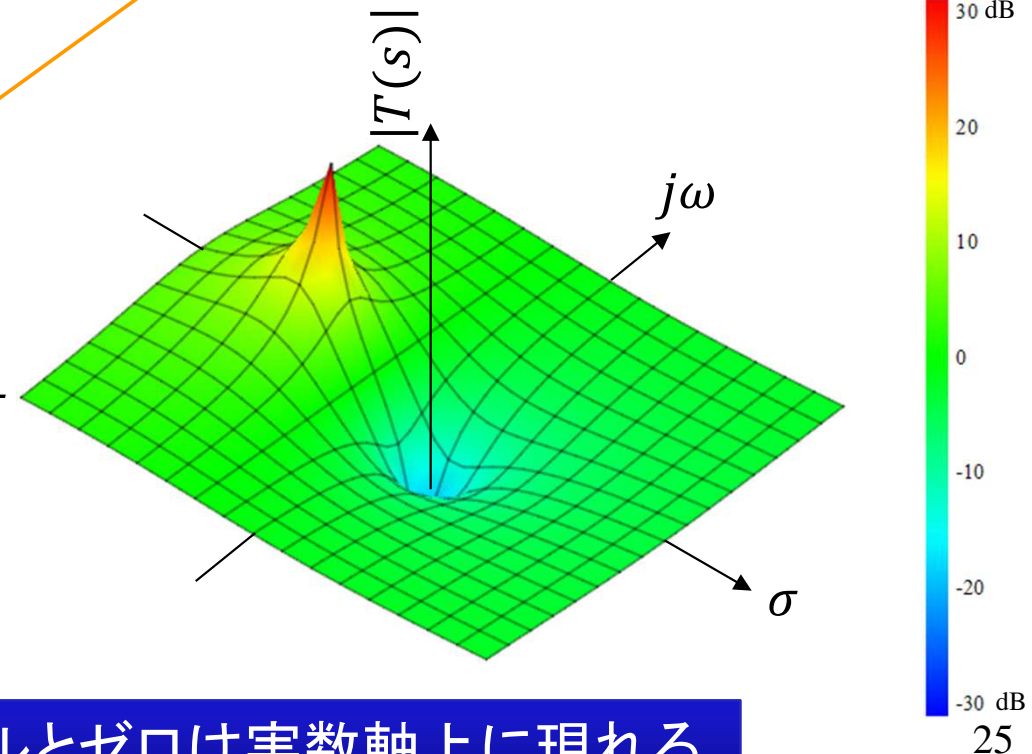
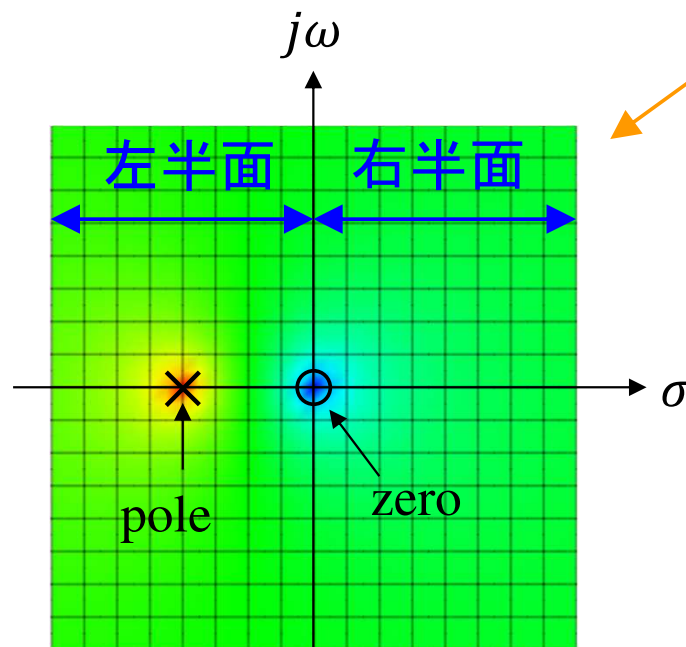
# ポールとゼロ (pole and zero)

$$T(s) = \frac{as + b}{cs + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

$|T(s)| = 0$ の点を**ゼロ(Zero)**  
 $|T(s)| = \infty$ の点を**ポール(Pole)** } と呼ぶ

伝達関数の形と周波数特性の関係

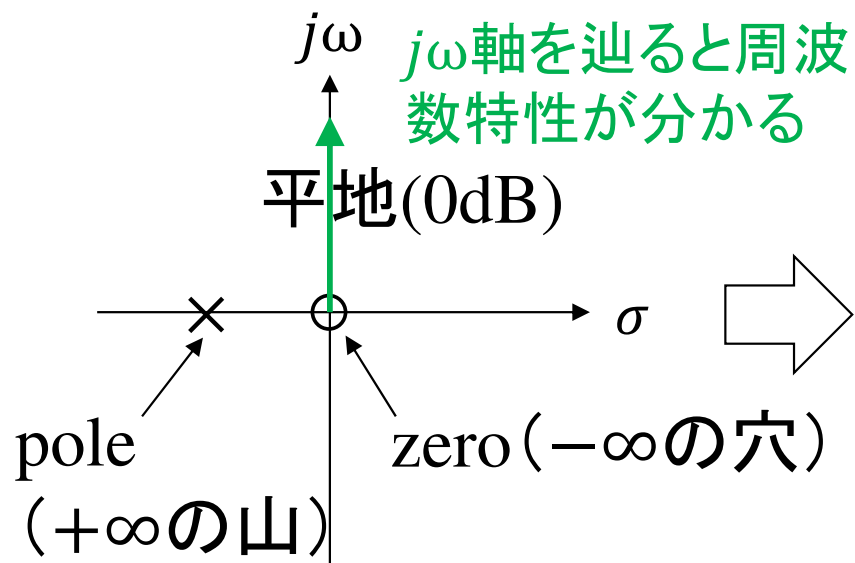
|         |                        |
|---------|------------------------|
| $a = 0$ | LPF (Low-pass filter)  |
| $b = 0$ | HPF (High-pass filter) |



sの1次関数のポールとゼロは実数軸上に現れる

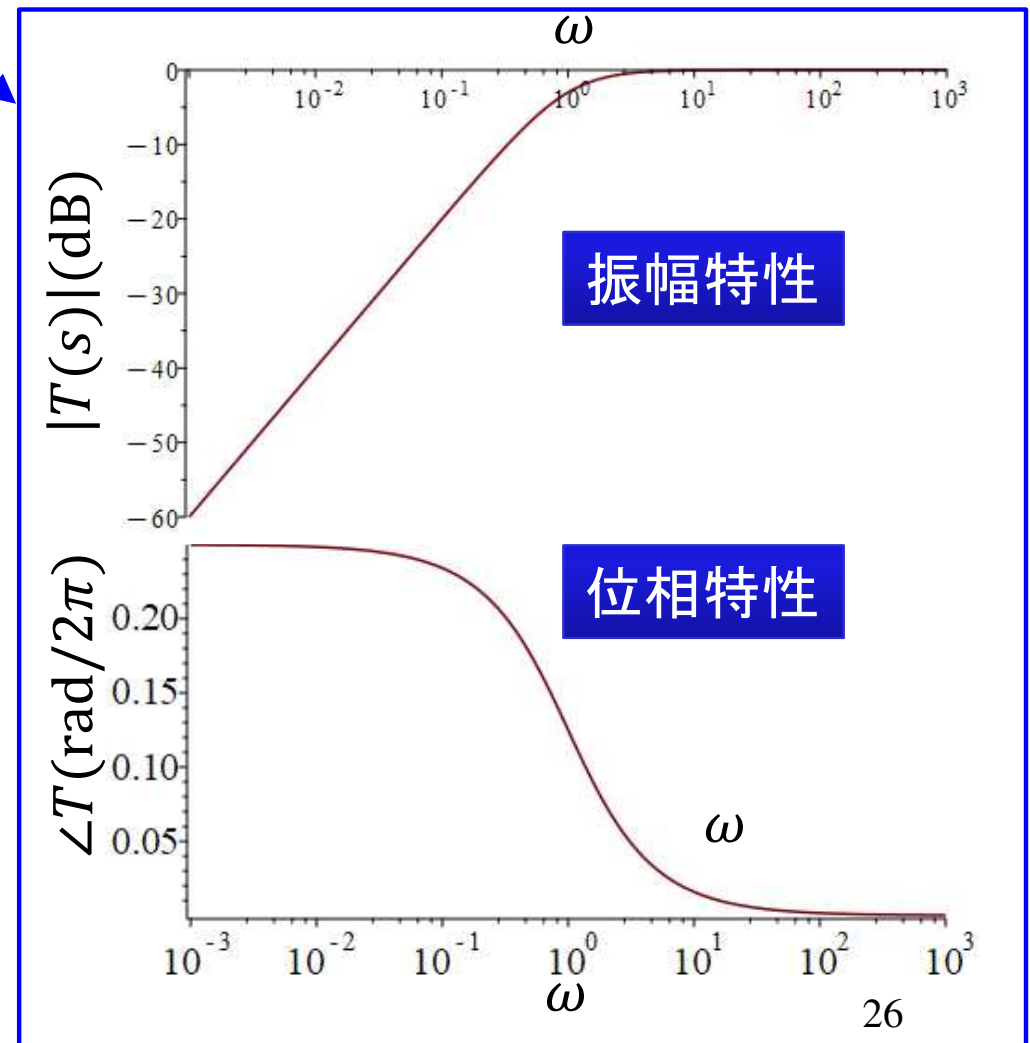
# pz図とボーデ線図

周波数特性は**ボーデ線図** (Bode diagram) により表される。



pz図 (s平面にポールとゼロの位置を表記)

pz図からボーデ線図の概略を予想できる



# デシベル

ボーデ線図の縦軸は、**デシベル(dB)**で表示される。  
デシベルは、値の絶対値の比(信号の場合は振幅の比)を表す表記法である。

信号電圧、信号電流のデシベル  $\text{dB} = 20 \log_{10} \left| \frac{V_2}{V_1} \right|$

信号電力、雑音電力のデシベル  $\text{dB} = 10 \log_{10} \left| \frac{P_2}{P_1} \right|$

↑  
電力の場合は、10になることに注意

(参考) 無線通信などでよく使用されるdBmは、比の絶対値ではなくmWを単位とする電力を表しているので注意。

$$\text{dBm} = 10 \log_{10} P(\text{mW})$$

# (参考) 対数関数の表記

- 高校数学では、自然対数の底は省略して $\log_e x = \log x$ , 常用対数の底は省略せず $\log_{10} x$ と表記している
- 工学系では、 $\log_e x = \ln x$ ,  $\log_{10} x = \log x$ ,  $\log_2 x = \text{lb} x$  (国際標準), または $\log_2 x = \lg x$ ,  $\log_2 x = \log x$  (情報系) の表記法が普及しているため、教科書や文献によって、 $\log x$ の意味が異なっていることに注意。
- $\log$ 表記を使用する場合、**対数の底を省略しないことを推奨**する。

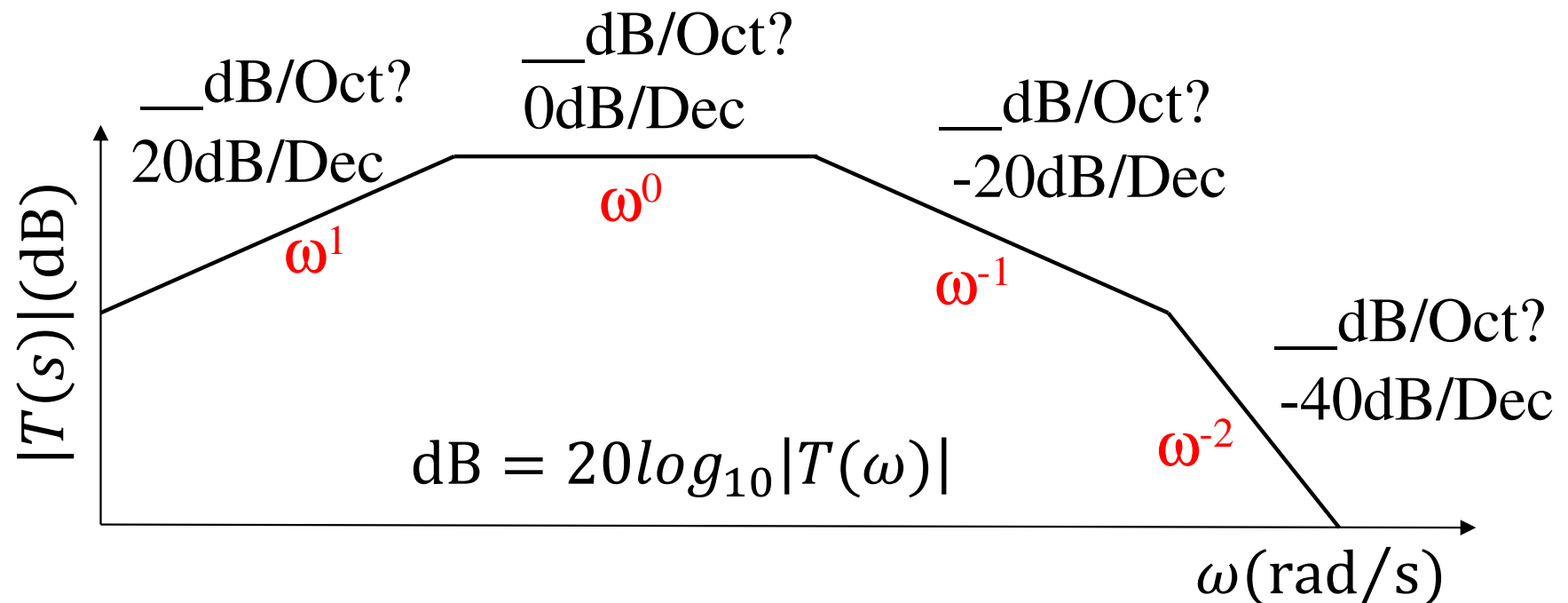
# クイズ

1. 増幅率100倍の増幅器の増幅率は何デシベル？
2. 増幅率1000倍の増幅器の増幅率は何デシベル？
3. 減衰率1:0.1の減衰器の減衰率は何デシベル？
4. 信号の増幅も減衰もしない回路の増幅率は何デシベル？
5.  $1/\omega$  の周波数特性を持つ回路の出力は、周波数が一桁上がる毎に、何デシベル変化する？
6.  $1/\omega^2$  の周波数特性を持つ回路の出力は、周波数が一桁上がる毎に、何デシベル変化する？
7. 100倍の増幅器を2回通ると、信号振幅は何デシベル増える？
8. 誤差が1%含まれているデータの誤差率は何デシベル？

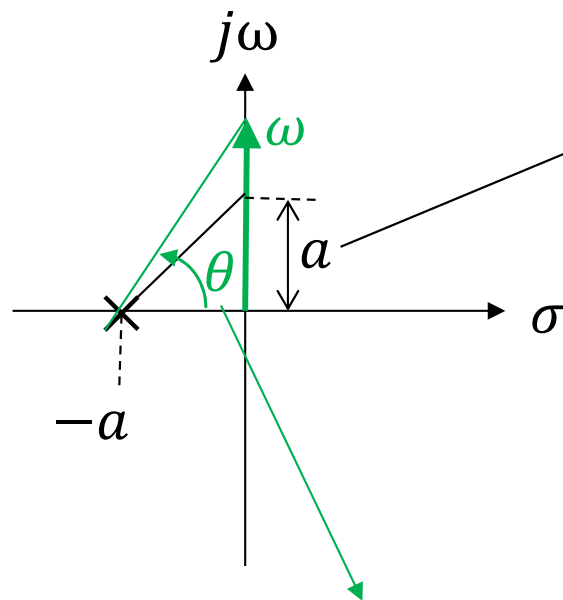
# 周波数特性の次数とdBの傾き

ボーデ線図の振幅特性の傾きは、dB/DecまたはdB/Octで表される。

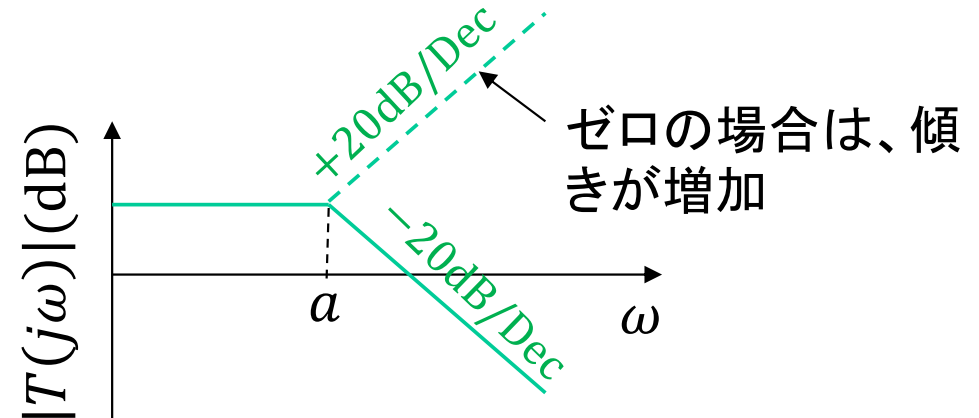
- dB/Dec:  $\omega$ が10倍になったときのdBの変化で傾きを表す
- dB/Oct:  $\omega$ が2倍になったときのdBの変化で傾きを表す



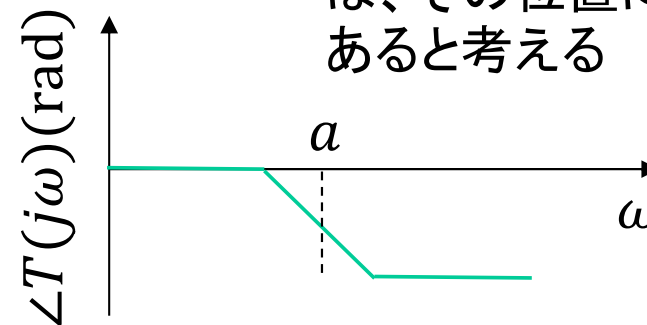
# pz図からボード線図を描く手順



2. ポール、ゼロと $j\omega$ 軸を結ぶ線と $\sigma$ 軸の角度から位相を求める
  - ポールによる位相は $-\theta$
  - ゼロによる位相は $+\theta$



1. ポール、ゼロと $j\omega$ 軸の距離から折れ点(コーナ)を求める
  - 虚数軸上のポール、ゼロは、その位置にコーナがあると考え



# 振幅特性の計算(ポールが1個の場合)

$$T(s) = \frac{1}{s+c} = \xrightarrow{s=j\omega} \frac{1}{c} \frac{1}{1+j\frac{\omega}{c}}$$

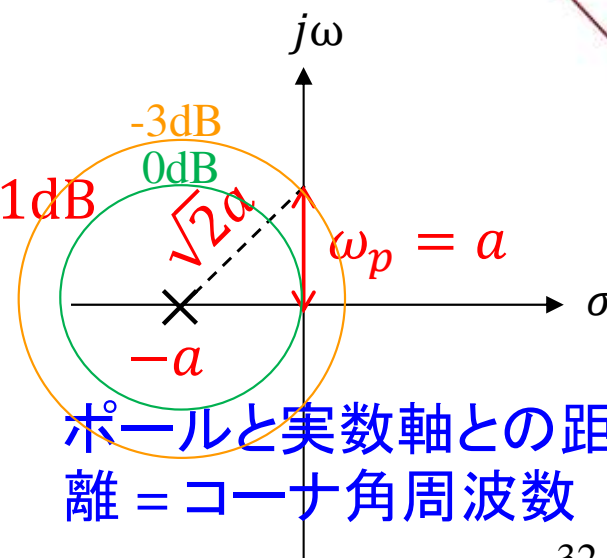
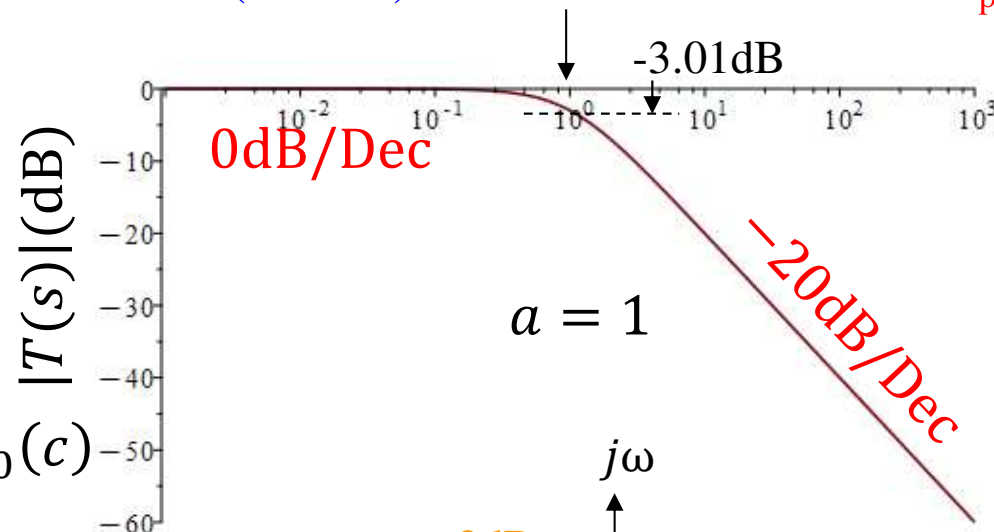
$$|T(j\omega)| = \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}}$$

$$\frac{\omega}{c} \ll 1 \quad |T(j\omega)| \cong \frac{1}{c} \rightarrow -20\log_{10}(c)$$

$$\boxed{\frac{\omega}{c} = 1} \quad |T(j\omega)| = \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow -20\log_{10}(c) - 3.01\text{dB}$$

$$\frac{\omega}{c} \gg 1 \quad |T(j\omega)| \cong \frac{1}{\omega} \rightarrow -20\log_{10}(\omega)$$

コーナ(Corner)または折れ点角周波数  $\omega_p$



コーナ各周波数を境に $\omega$ の次数が変わる  
(振幅特性が時計回りに折れる)

ポールと実数軸との距離 = コーナ角周波数

# 位相特性の計算(ポールが1個の場合)

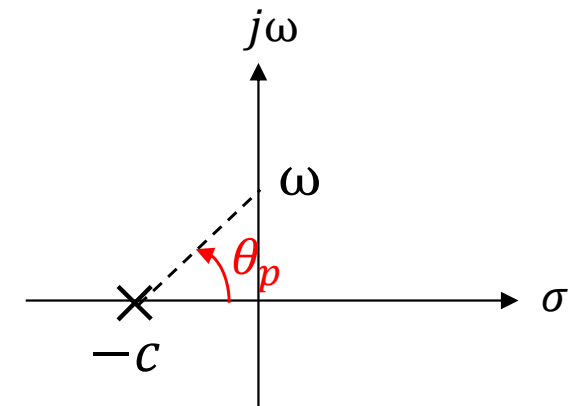
$$T(s) = \frac{b}{s+c} = \xrightarrow{s=j\omega} \frac{b}{c} \frac{1}{1+j\frac{\omega}{c}} = \frac{b}{c} \frac{1-j\frac{\omega}{c}}{1+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2} = \frac{b}{c} \frac{1-j\frac{\omega}{c}}{1+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2}$$

$$\angle T(j\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}[T(j\omega)]}{\text{Re}[T(j\omega)]}\right) = \arctan\left(-\frac{\omega}{c}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{c}\right) = -\theta_p$$

$$\frac{\omega}{c} \rightarrow 0 \quad \angle T(j\omega) \cong \arctan(0) = 0 \text{ rad}$$

$$\frac{\omega}{c} = 1 \quad \angle T(j\omega) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\frac{\omega}{c} \rightarrow \infty \quad \angle T(j\omega) \cong \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$



実数軸から見たポールと $\omega$ の角度の $-1$ 倍に比例。コーナの前後で $-\pi/2$ だけ変化。

# 振幅特性の計算(ゼロが1個の場合)

$$T(s) = s + b = \xrightarrow{s=j\omega} b \left( 1 + j \frac{\omega}{b} \right)$$

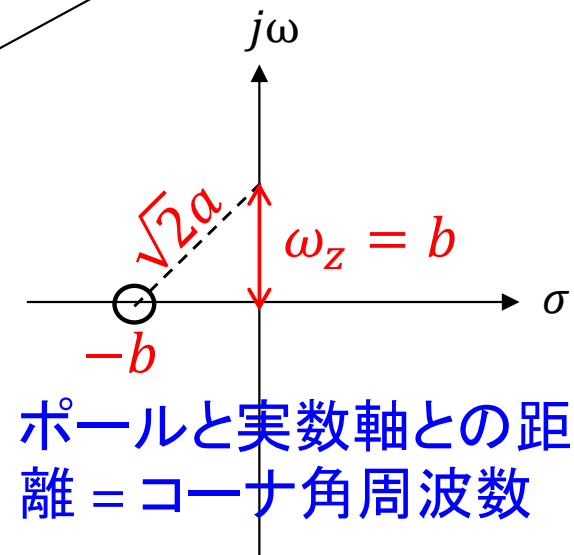
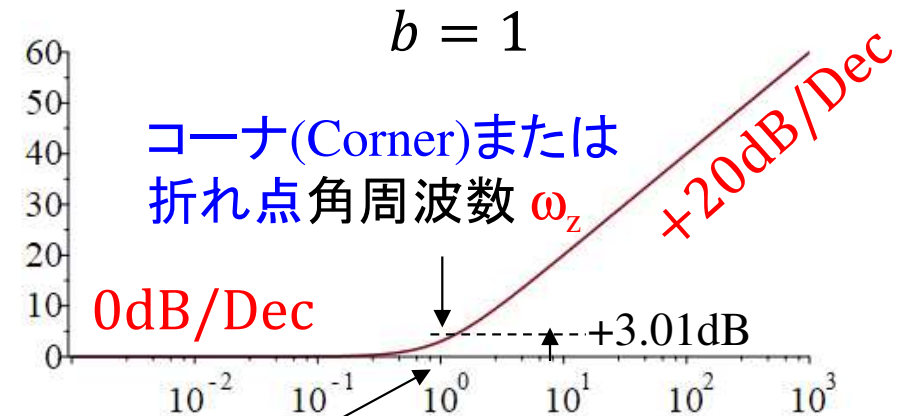
$$|T(j\omega)| = b \sqrt{1 + \left( \frac{\omega}{b} \right)^2}$$

$$\frac{\omega}{b} \ll 1 \quad |T(j\omega)| \cong b \rightarrow 20\log_{10}(b)$$

$$\boxed{\frac{\omega}{b} = 1} \quad |T(j\omega)| = b\sqrt{2} \rightarrow -20\log_{10}(b) + 3.01\text{dB}$$

$$\frac{\omega}{b} \gg 1 \quad |T(j\omega)| \cong \omega \rightarrow +20\log_{10}(\omega)$$

コーナ各周波数を境に $\omega$ の次数が変わる  
(振幅特性が反時計回りに折れる)



# 位相特性の計算(ゼロが1個の場合)

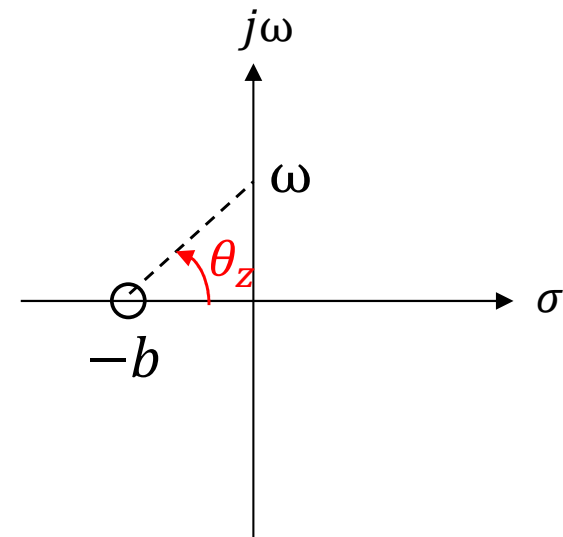
$$T(s) = s + b = \xrightarrow{s=j\omega} b \left( 1 + j \frac{\omega}{b} \right)$$

$$\angle T(j\omega) = \arctan \left( \frac{\text{Im}[T(j\omega)]}{\text{Re}[T(j\omega)]} \right) = \arctan \left( \frac{\omega}{b} \right) = +\theta_z$$

$$\frac{\omega}{b} \rightarrow 0 \quad \angle T(j\omega) \cong \arctan(0) = 0 \text{ rad}$$

$$\frac{\omega}{b} = 1 \quad \angle T(j\omega) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\frac{\omega}{b} \rightarrow \infty \quad \angle T(j\omega) \cong \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$



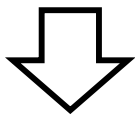
実数軸から見たポールと $\omega$ の角度に比例。コーナの前後で $+\pi/2$ だけ変化。

# (復習) 複素数の乗算、除算と位相

$$\begin{cases} x_1 = a + jb = |x_1|e^{\theta_1} \\ x_2 = c + jd = |x_2|e^{\theta_2} \end{cases} \quad \text{のとき}$$

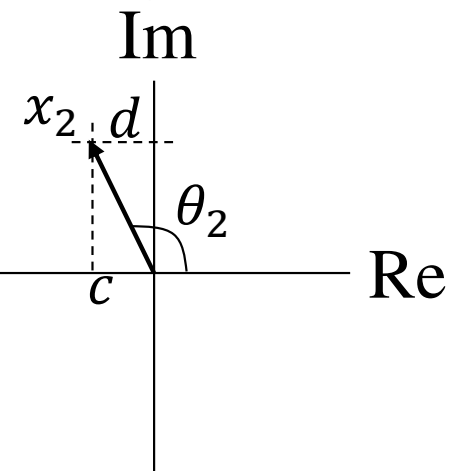
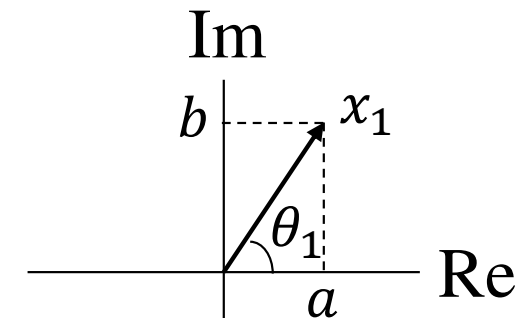
$$x_1 x_2 = (a + jb)(c + jd) = |x_1||x_2|e^{(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a + jb}{c + jd} = \frac{|x_1|}{|x_2|} e^{(\theta_1 - \theta_2)}$$



$$\angle(x_1 x_2) = \theta_1 + \theta_2 = \angle x_1 + \angle x_2 = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \arctan\left(\frac{d}{c}\right)$$

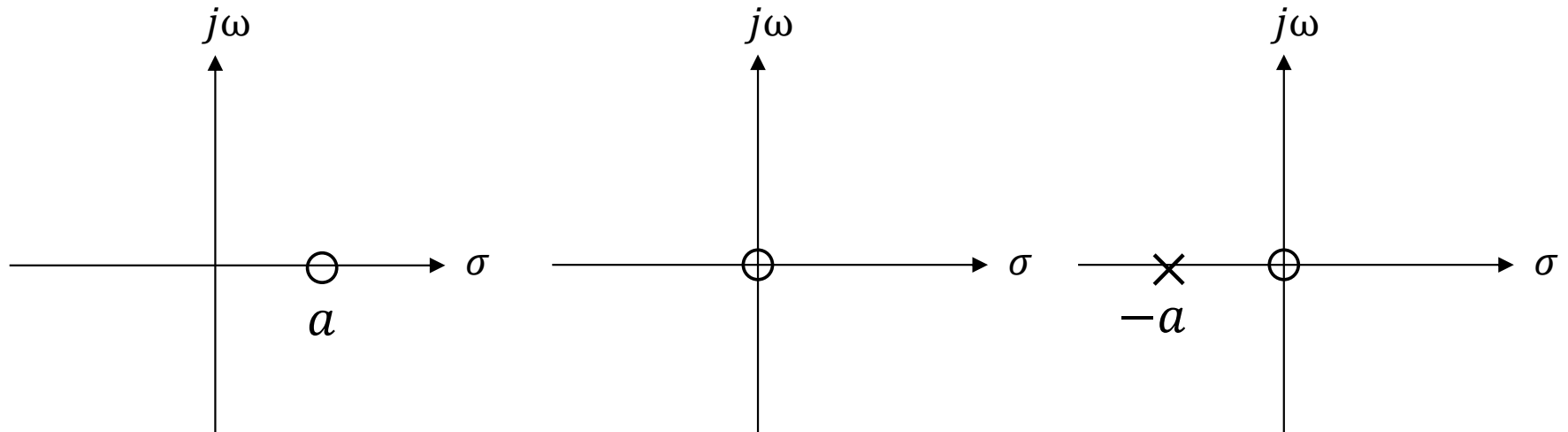
$$\angle\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \angle x_1 - \angle x_2 = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \arctan\left(\frac{d}{c}\right)$$



複素数の乗算、除算は、位相の加算、減算に相当する

# クイズ

- 下記のポールおよびゼロ配置を持つ伝達関数について、 $\omega = 0, \omega = a, \omega = \infty$ における位相を求めよ。

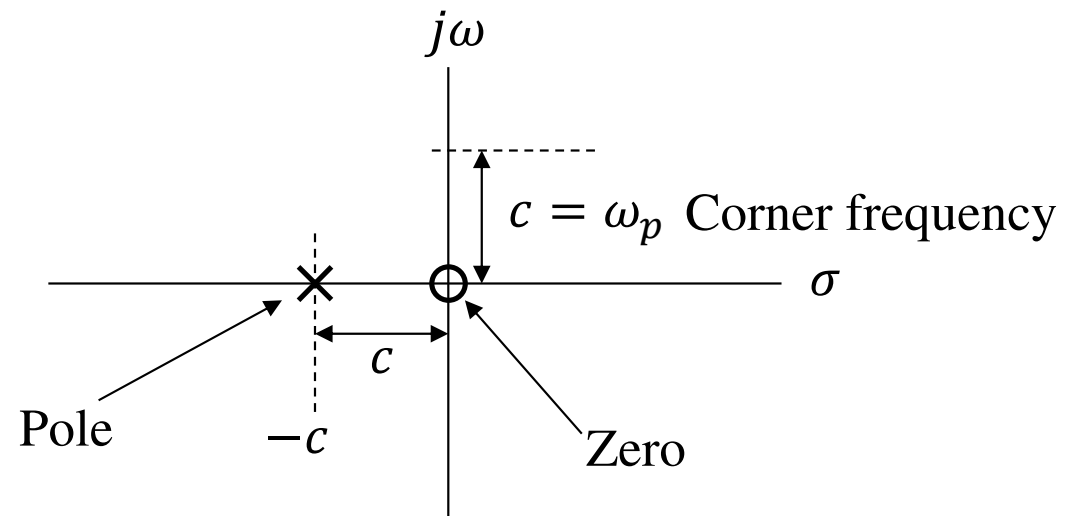


# HPF(スライド23)の振幅特性

$$T(s) = \frac{a \cdot s}{s + c} = \frac{a}{c} \frac{s}{1 + \frac{s}{c}}$$

$$T(j\omega) = \frac{a}{c} \frac{j\omega}{1 + j\frac{\omega}{c}}$$

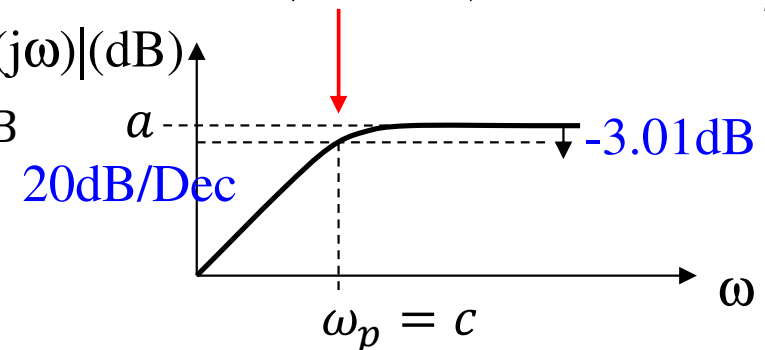
$$|T(j\omega)| = \frac{a}{c} \frac{\omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}}$$



コーナ角周波数または遮断(Cut-off)角周波数 $\omega_p$

$$\begin{cases} \omega \ll c \rightarrow |T(j\omega)| = \frac{a}{c} \omega \\ \omega = c \rightarrow |T(j\omega)| = \frac{a}{\sqrt{2}} \\ \omega \gg c \rightarrow |T(j\omega)| = a \end{cases}$$

( $\omega$ に比例)  
 $\frac{1}{\sqrt{2}} \cong -3.01\text{dB}$   
 (定数)

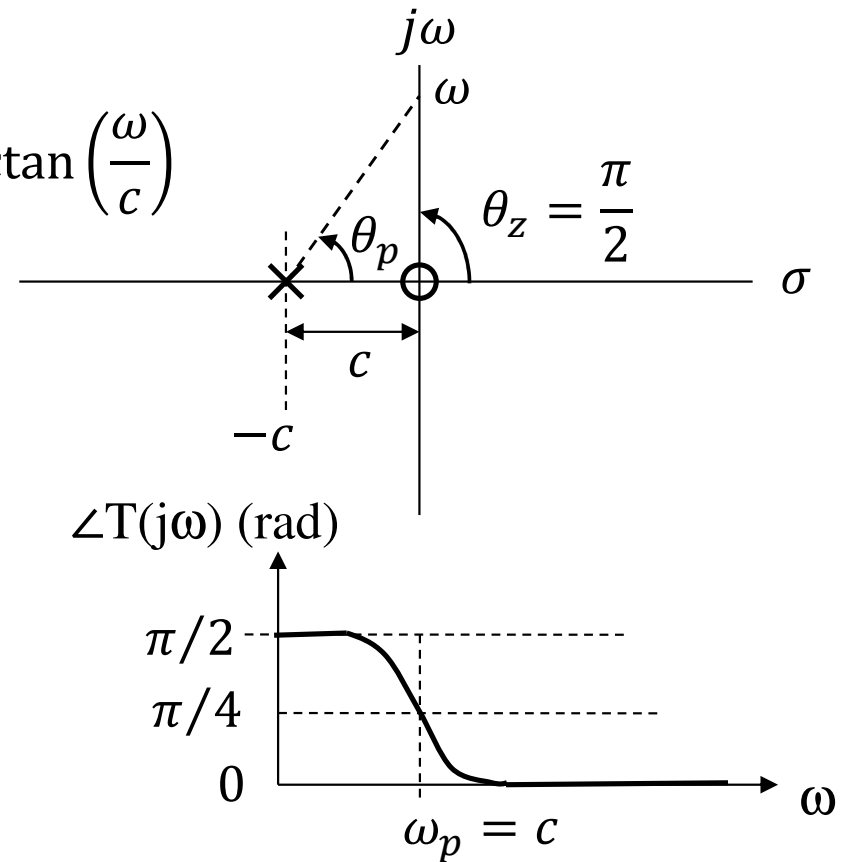


# HPF (スライド23) の位相特性

$$T(j\omega) = \frac{a}{c} \frac{j\omega}{1 + j\frac{\omega}{c}}$$

$$\angle T(j\omega) = \arctan\left(\frac{j\omega}{0}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{c}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

$$\begin{cases} \omega \ll c \rightarrow \angle T(j\omega) \cong \frac{\pi}{2} - \arctan(0) = \frac{\pi}{2} \\ \omega = c \rightarrow \angle T(j\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \\ \omega \gg c \rightarrow \angle T(j\omega) \cong \frac{\pi}{2} - \arctan(\infty) = 0 \end{cases}$$



# 周波数特性のまとめ

- ポールとゼロと虚数軸の距離に等しい角周波数にコーナが発生する
- コーナの前後で下記の特性変化が生じる

| グラフ  | Zeroによるコーナ                                         | Poleによるコーナ                                     |
|------|----------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| 振幅特性 | 傾きが+20dB変化<br>(傾き増加)                               | 傾きが-20dB変化<br>(傾き減少)                           |
| 位相特性 | 左半面のZeroの場合 $+\pi/2$ 変化<br>右半面のZeroの場合 $-\pi/2$ 変化 | 左半面のPole: $-\pi/2$ 変化<br>右半面のPole: $+\pi/2$ 変化 |

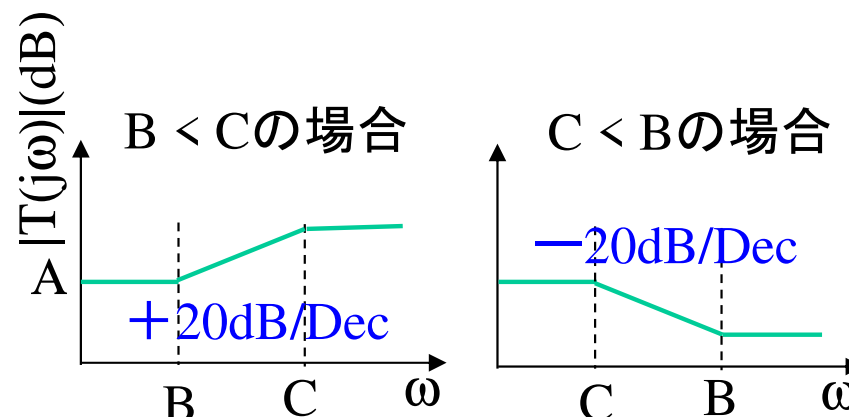
(参考) 振幅特性は、コーナ周波数で傾きが変化し、位相はコーナ周波数の前後2桁程度の周波数範囲で値が変化する。

# 複数コーナを持つ周波数特性の折れ線近似(振幅特性)

1-Zero, 1-Poleの例

$$T(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} = A \frac{1 + j\frac{\omega}{B}}{1 + j\frac{\omega}{C}}$$

$$|T(j\omega)| = A \frac{|P(j\omega)|}{|Q(j\omega)|} = A \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{B}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{C}\right)^2}}$$



$P(j\omega)$ の振幅特性

$1/Q(j\omega)$ の振幅特性

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega \ll B & |P(j\omega)| = 1 \\ \omega = B & |P(j\omega)| = \sqrt{2} \text{ (コーナ)} \\ \omega \gg B & |P(j\omega)| = \frac{\omega}{B} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega \ll C & \left| \frac{1}{Q(j\omega)} \right| = 1 \\ \omega = C & \left| \frac{1}{Q(j\omega)} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (コーナ)} \\ \omega \gg C & \left| \frac{1}{Q(j\omega)} \right| = \frac{C}{\omega} \end{array} \right.$$

# 複数コーナを持つ周波数特性の折れ線近似(位相特性)

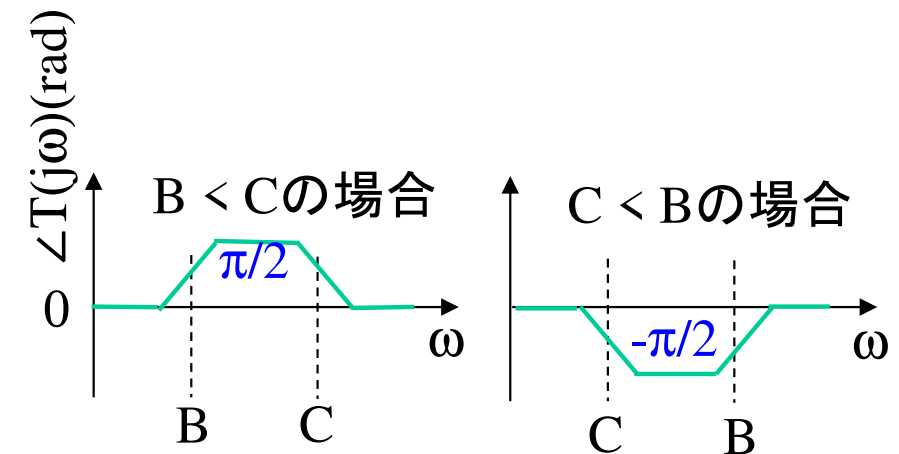
## 1-Zero, 1-Poleの例

$$T(j\omega) = A \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} = A \frac{1 + j\frac{\omega}{B}}{1 + j\frac{\omega}{C}}$$

$$\angle T(j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{B}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{C}\right)$$

$P(j\omega)$ の位相特性

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega \ll B & \angle P(j\omega) = 0 \\ \omega = B & \angle P(j\omega) = \frac{\pi}{4} \quad (\text{コーナ}) \\ \omega \gg B & \angle P(j\omega) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$



$1/Q(j\omega)$ の位相特性

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega \ll C & \angle\left(\frac{1}{Q(j\omega)}\right) = 0 \\ \omega = C & \angle\left(\frac{1}{Q(j\omega)}\right) = -\frac{\pi}{4} \quad (\text{コーナ}) \\ \omega \gg C & \angle\left(\frac{1}{Q(j\omega)}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

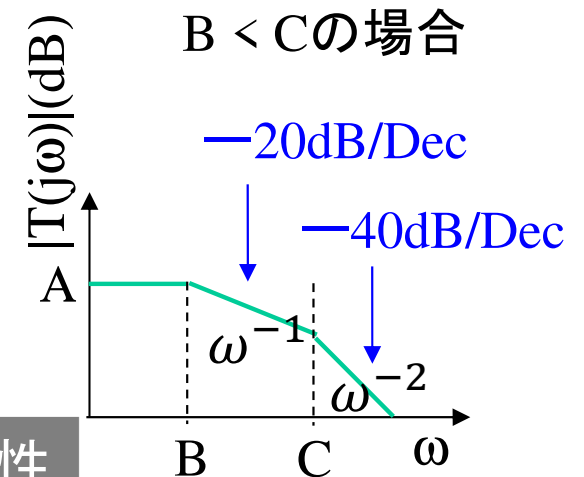
# 2ポール振幅特性の折れ線近似

$$T(j\omega) = A \frac{1}{P(j\omega)Q(j\omega)} = A \frac{1}{(1 + j\frac{\omega}{B})(1 + j\frac{\omega}{C})}$$

$$|T(j\omega)| = A \frac{1}{|P(j\omega)||Q(j\omega)|} = A \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{B})^2} \sqrt{1 + (\frac{\omega}{C})^2}}$$

1/P(jω)の振幅特性

1/Q(jω)の振幅特性



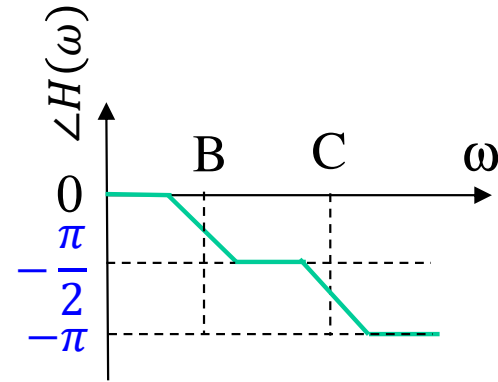
$$\left[ \begin{array}{l} \omega \ll B \\ \omega = B \\ \omega \gg B \end{array} \right. \left| \frac{1}{P(j\omega)} \right| = \begin{array}{l} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{B}{\omega} \end{array} \quad (\text{コ一ナ})$$

$$\left[ \begin{array}{l} \omega \ll \frac{1}{C} \\ \omega = \frac{1}{C} \\ \omega \gg \frac{1}{C} \end{array} \right. \left| \frac{1}{Q(j\omega)} \right| = \begin{array}{l} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{C}{\omega} \end{array} \quad (\text{コ一ナ})$$

# 2ポール位相特性の折れ線近似

$$T(j\omega) = A \frac{1}{P(j\omega)Q(j\omega)} = A \frac{1}{(1 + j\frac{\omega}{B})(1 + j\frac{\omega}{C})}$$

$$\begin{aligned}\angle T(j\omega) &= \angle A - \angle P(j\omega) - \angle Q(j\omega) \\ &= \arctan\left(\frac{0}{A}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{B}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{C}\right) \\ &= -\arctan\left(\frac{\omega}{B}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{C}\right)\end{aligned}$$



$1/P(j\omega)$ の位相特性

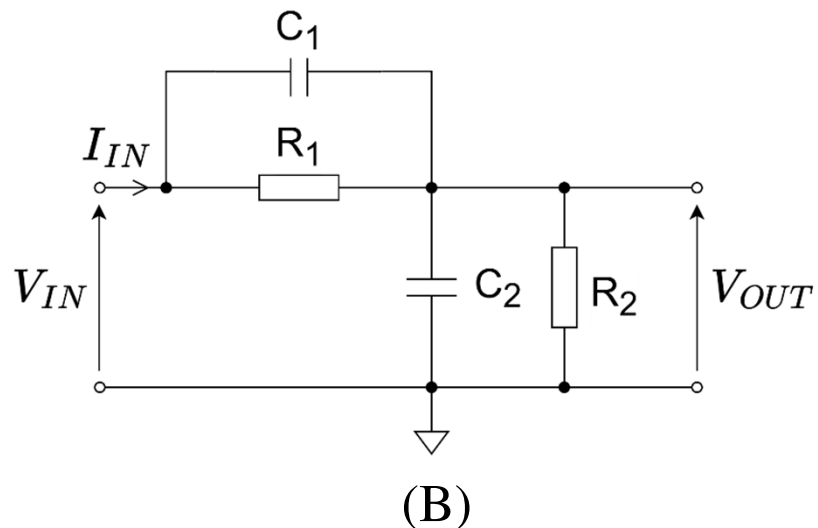
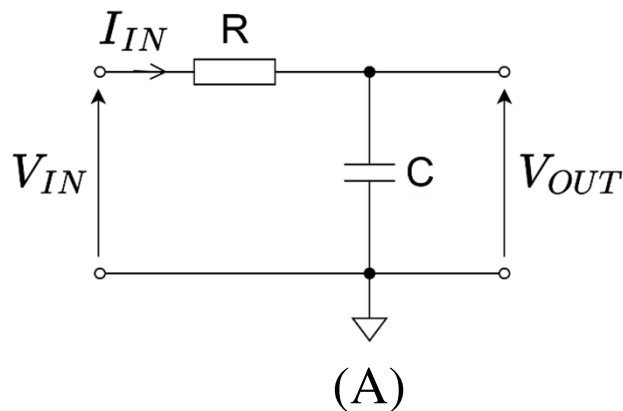
$1/Q(j\omega)$ の位相特性

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega \ll B \quad \angle\left(\frac{1}{P(j\omega)}\right) = -0 \\ \omega = B \quad \angle\left(\frac{1}{P(j\omega)}\right) = -\frac{\pi}{4} \quad (\text{コ一ナ}) \\ \omega \gg B \quad \angle\left(\frac{1}{P(j\omega)}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega \ll C \quad \angle\left(\frac{1}{Q(j\omega)}\right) = 0 \\ \omega = C \quad \angle\left(\frac{1}{Q(j\omega)}\right) = -\frac{\pi}{4} \quad (\text{コ一ナ}) \\ \omega \gg C \quad \angle\left(\frac{1}{Q(j\omega)}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

# 課題3. 3

1. 回路(A), (B)のs領域伝達関数を示し、ポール、ゼロの位置をs平面上に示せ。
2. 回路(A), (B)の周波数領域伝達関数とコーナ角周波数を求め、ボード線図(振幅と位相)の概略図を示せ。
3. (B)の回路で、周波数領域伝達関数が定数となる $C_1$ 、 $C_2$ 、 $R_1$ 、 $R_2$ の条件を求めよ。ただし、 $C_1$ 、 $C_2$ は0Fではないとする。

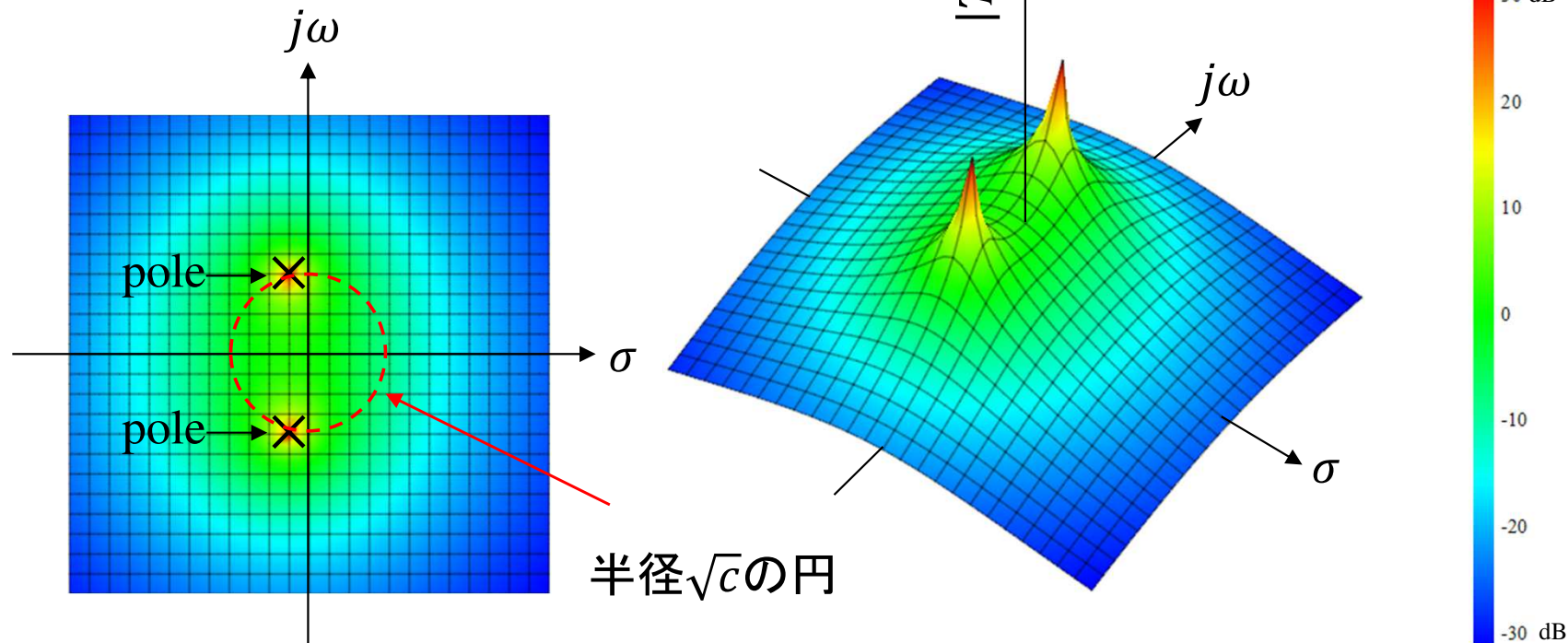


# 2次伝達関数のポール配置

$$T(s) = \frac{a}{s^2 + bs + c} \quad (4c - b^2 > 0)$$

$$s_p = -\frac{b}{2} \pm j \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} \quad (\text{共役複素数})$$

$$|s_p| = \sqrt{c}$$



# 2次LPFのポール配置

LPFの伝達関数

$$T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

[NOTE] 定数項を $\omega_0^2$ , 1次の係数を $\omega_0/Q$ と置くのは、LCR回路に由来。

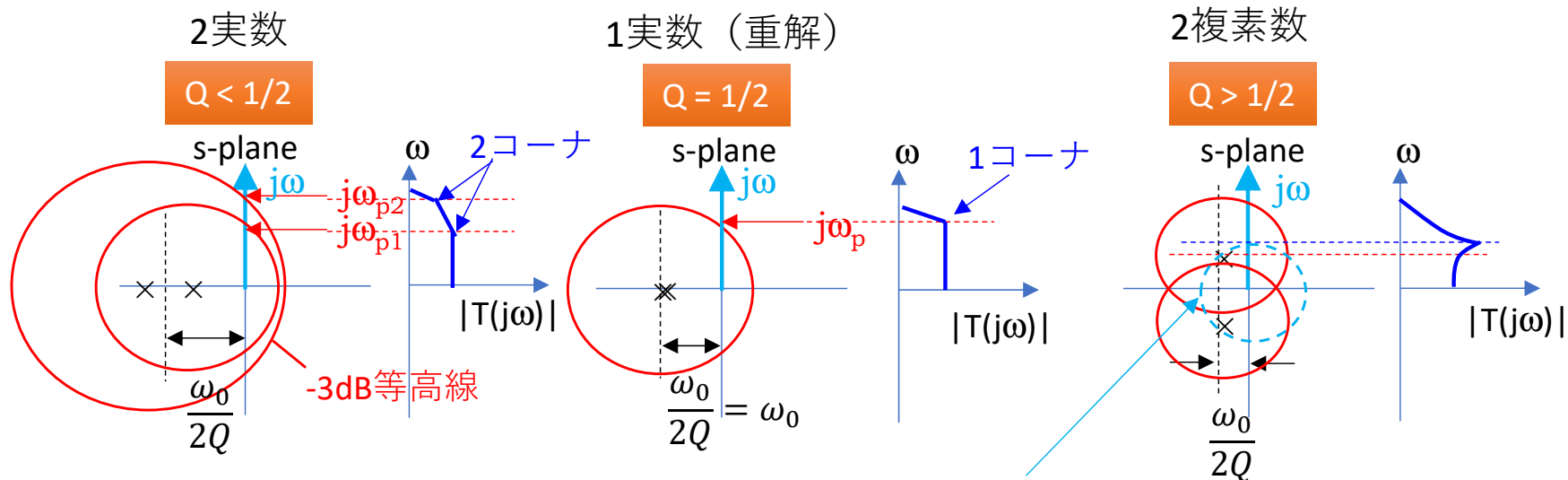
ポール

$$s_p = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2}$$

2実数、1実数（重解）、2複素数によって特性が異なる。

ゼロ

この例では発生しない



$|s_p| = \omega_0$  より、半径 $\omega_0$ の円上にポールが発生

# 2次BPFとHPFのポールとゼロ配置

BPFの伝達関数

$$T(s) = \frac{\frac{\omega_0}{Q}s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

ポール  $s_p = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2}$

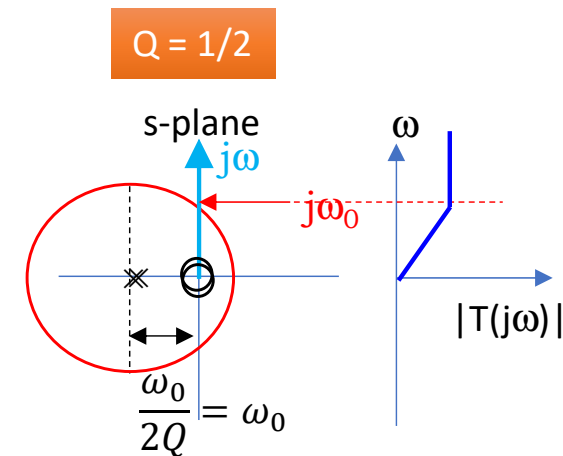
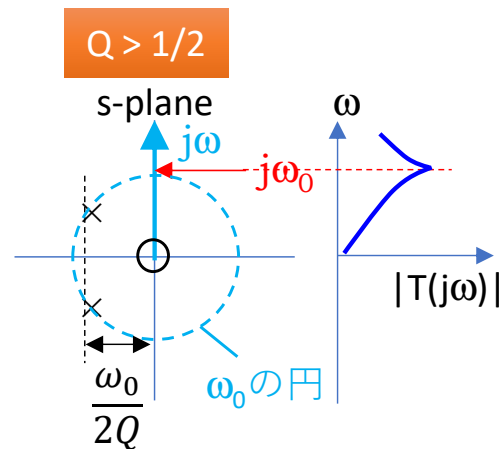
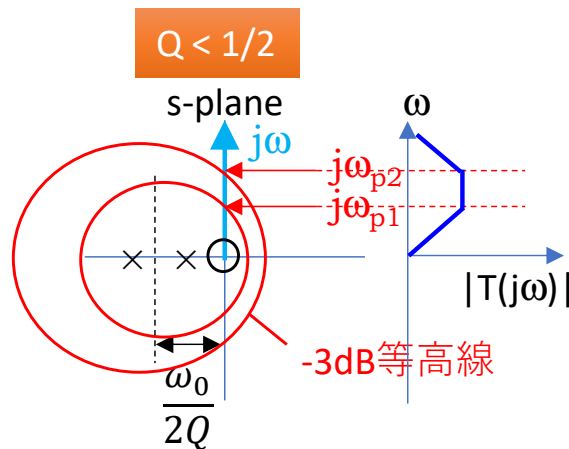
ゼロ  $s_z = 0$

HPFの伝達関数

$$T(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

ポール  $s_p = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2}$

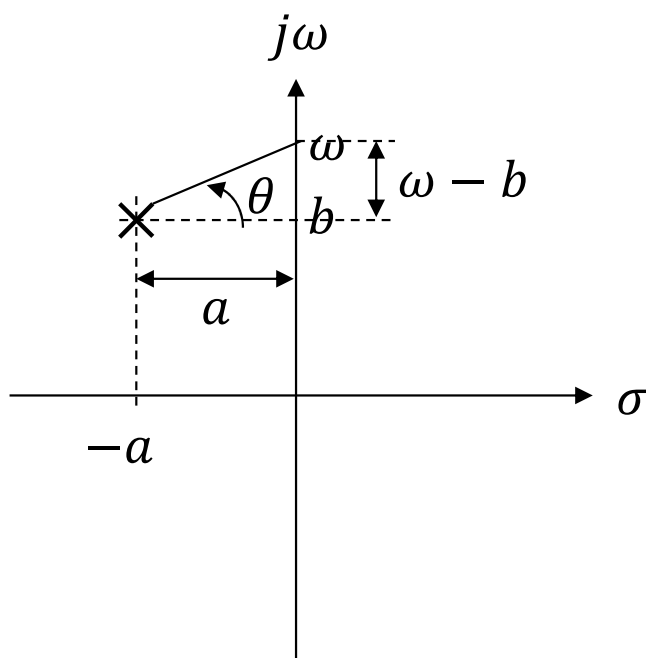
ゼロ  $s_z = 0$  (2重解)



# 複素数のポール、ゼロに対する 位相

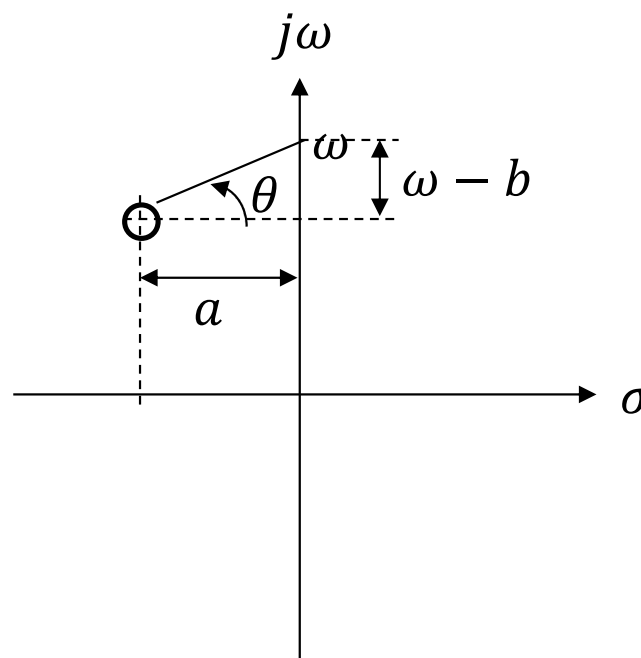
$$T(s) = \frac{1}{s + (a - jb)} \xrightarrow{s=j\omega} \frac{1}{a + j(\omega - b)}$$

$$\angle T(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega - b}{a}\right) = -\theta$$

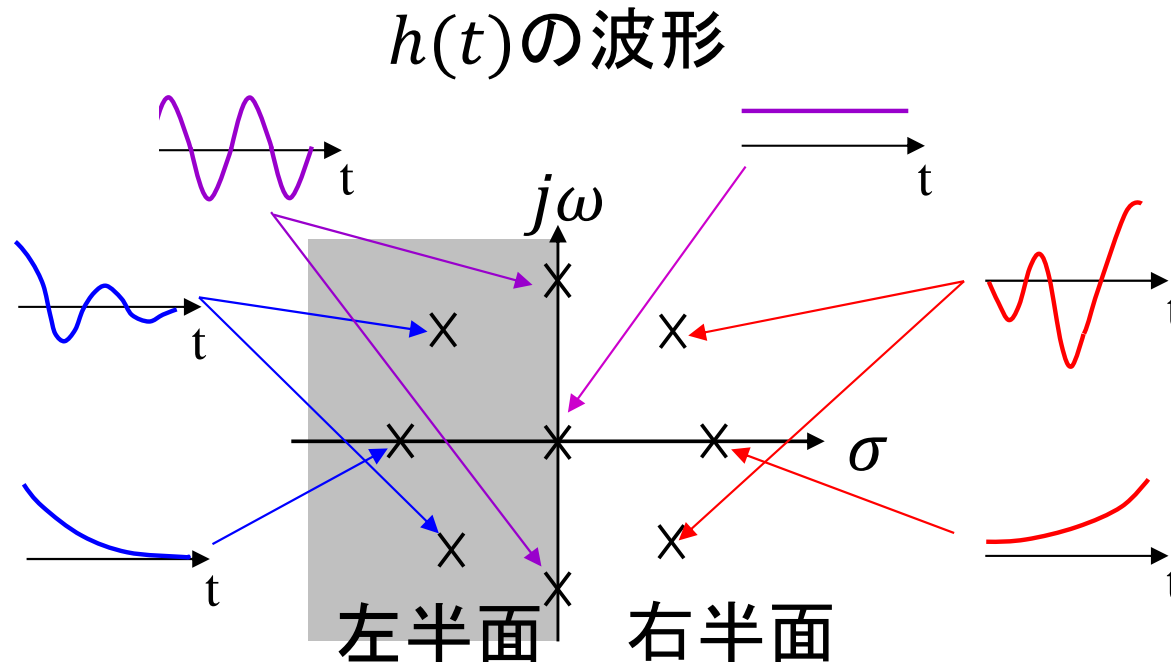
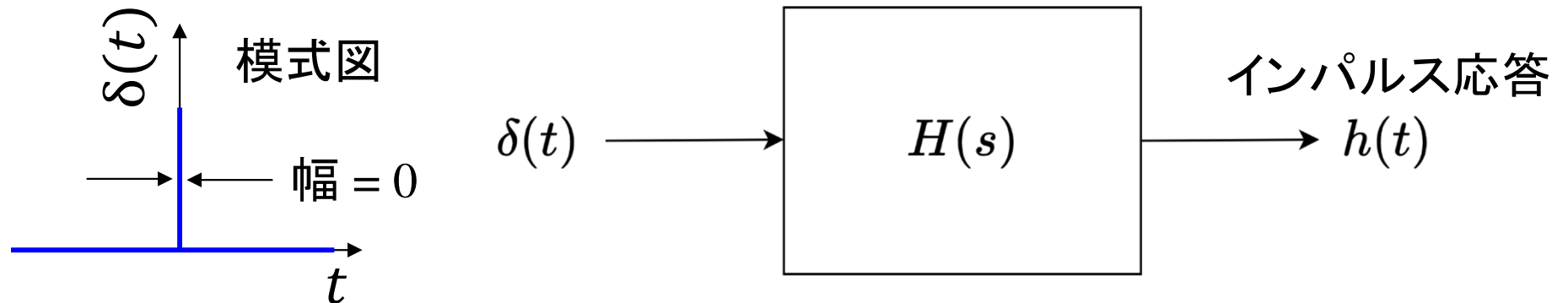


$$T(s) = s + (a + jb) \xrightarrow{s=j\omega} a + j(\omega - b)$$

$$\angle T(j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega - b}{a}\right) = \theta$$



# ポールの位置と安定性



虚数軸と右半面にポールがある回路は、インパルス応答が0に収束しないため出力が出続けて不安定。

# 3. 3節のまとめ

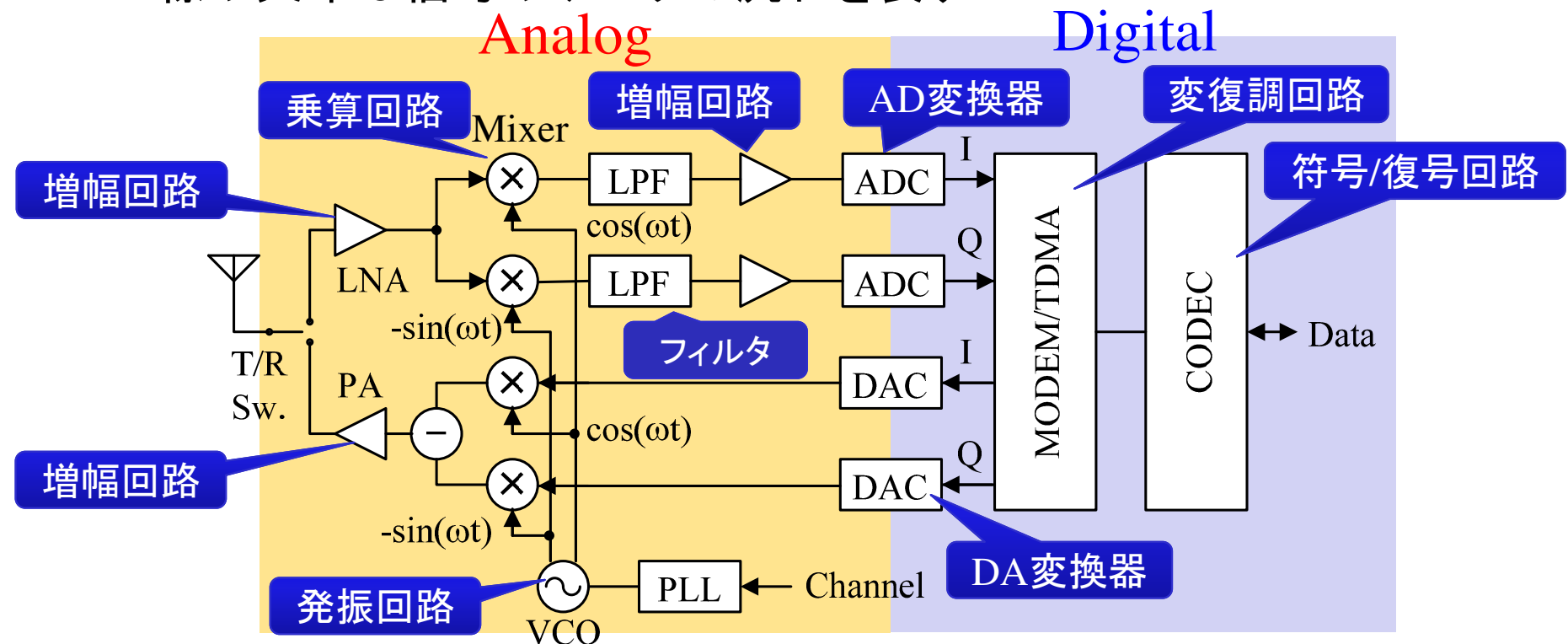
- 周波数領域伝達関数のボード線図で周波数特性を表す
  - 横軸＝角周波数(対数目盛を使うことが多い)
  - 縦軸＝振幅(デシベル)と位相(入出力間の位相差に相当)
- ポールとゼロの配置により、ボード線図の形が決まる
  - 振幅特性が折れる(傾きが変化する)角周波数は、コーナ周波数と呼ばれ、 $s$ 平面上のポールとゼロの位置で決定される
    - ポールは、時計回りに折れるコーナを発生させる
    - ゼロは、反時計回りに折れるコーナを発生させる
  - コーナ周波数の前後で伝達関数の位相が変化する
    - $s$ 平面上で、ポールと $\omega$ を結ぶ線の実軸方向からの角度掛ける $-1$ が位相を表す
    - $s$ 平面上で、ゼロと $\omega$ を結ぶ線の実軸方向からの角度が位相を表す
- 伝達関数のポールの位置により回路の安定性を判定できる
  - 虚数軸、右反面のポールを持つ回路は、不安定となる

階層化された回路の表記

## 3.4 ブロックダイアグラム

# ブロックダイアグラム

- ブロックダイアグラム(Block diagram)は、回路等のシステムの表現方法として用いられる。
  - 箱や記号は伝達関数、算術演算などを表す
  - 線や矢印は信号やデータの流れを表す

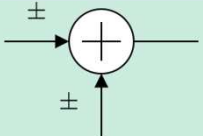
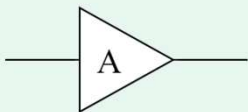
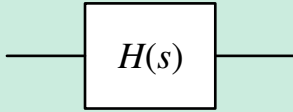
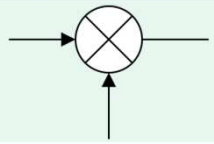
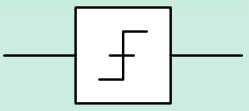
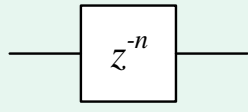


無線通信回路のブロックダイアグラムの例

# 前スライドの用語

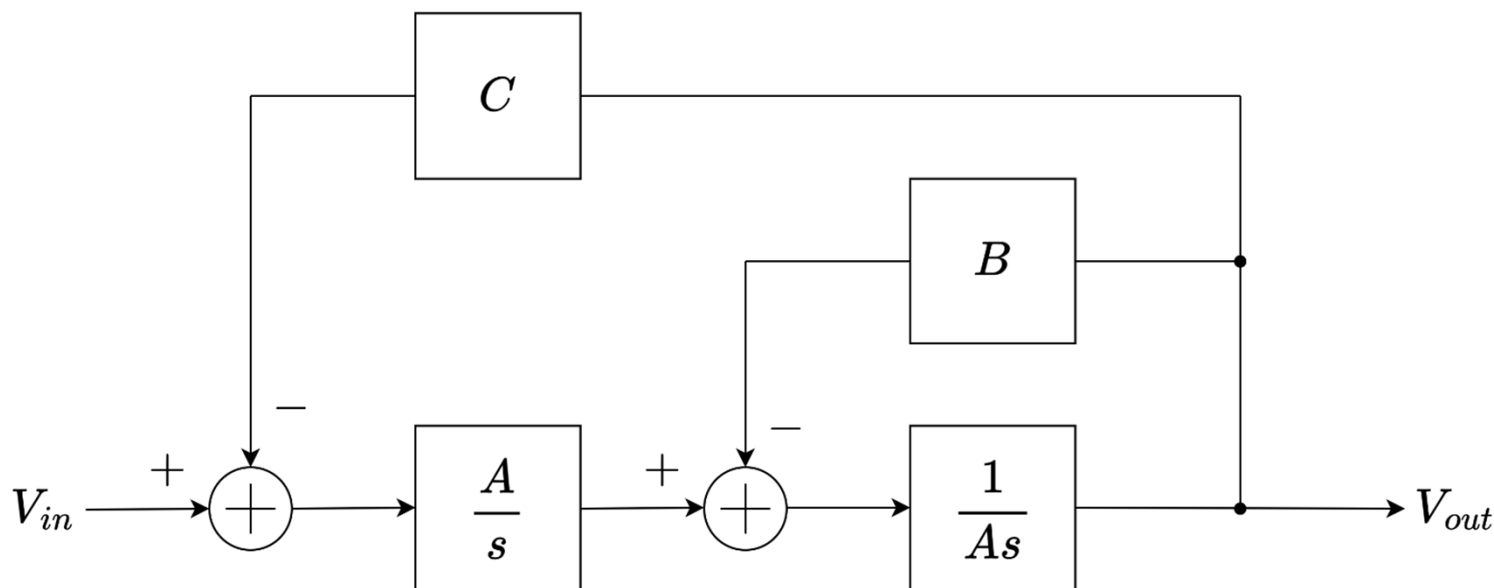
|        |                                            |
|--------|--------------------------------------------|
| T/R:   | Transmit/Receive(送受信)                      |
| LNA:   | Low noise amplifier(低雑音増幅器)                |
| PA:    | Power Amplifier(電力増幅器)                     |
| Mixer: | 乗算器(周波数変換に使用)                              |
| VCO:   | Voltage controlled oscillator(電圧制御発振器)     |
| LPF:   | Low pass filter(低域通過フィルタ)                  |
| PLL:   | Phase locked loop(周波数シンセサイザとして使用)          |
| ADC:   | Analog-to-digital converter(アナログ-ディジタル変換器) |
| DAC:   | Digital-to-analog converter(ディジタル-アナログ変換器) |
| I/Q:   | In-phase/Quadrature(cos成分/sin成分)           |
| Modem: | Modulation/Demodulation(変調復調器)             |
| TDMA:  | Time Division Multiple Access(時分割多元接続)回路   |
| CODEC: | 符号化/復号化回路                                  |

# ブロックダイアグラムの主要要素

| 記号(Symbol)                                                                          | 操作(Operation)   | 回路(Circuit)                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|---------------------------------------------|
|    | 加減算             | 加算器、減算器                                     |
|    | 定数倍 (Aを掛ける)     | 増幅器 (Amplifier)<br>※ 部品としての増幅回路は増幅器と呼ぶ傾向がある |
|    | 伝達関数 (H(s)を掛ける) | フィルタ等                                       |
|  | 乗算              | 乗算器                                         |
|  | 量子化             | 電圧比較器 (Comparator)                          |
|  | 遅延 (nクロック遅延)    | スイッチトキャパシタ (アナログ)<br>Dフリップフロップ (デジタル)       |

# 伝達関数のブロックダイアグラムによる表現

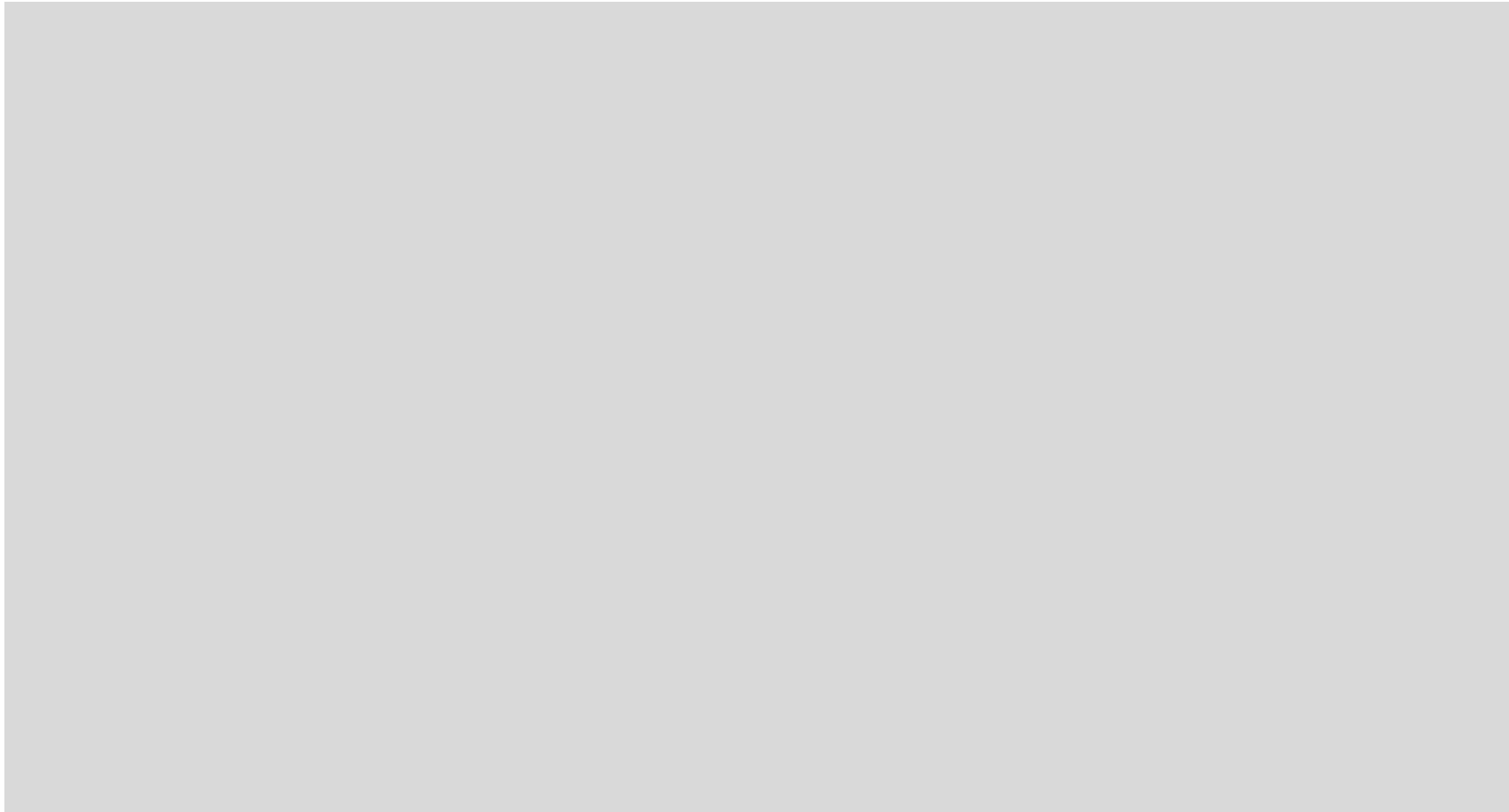
Slide33のLPF(Low Pass Filter)のブロックダイアグラム例



機能ブロック(ここではLPF)の伝達関数を定数倍、積分、微分、加減算などの演算ブロックのみで表し、これらのブロックを定数倍回路(=増幅回路)、積分器、微分器、加減算器などに置き換えることにより回路設計が行われる。

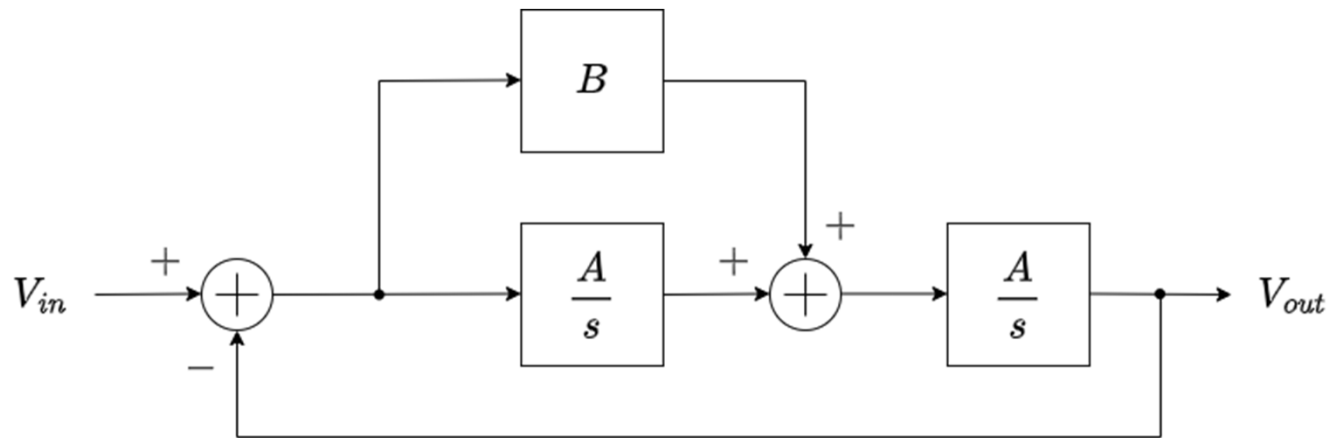
# クイズ1

1. 前スライドのブロックダイアグラム全体の伝達関数を求めよ。



## 課題3. 4

1. 下記のブロックダイアグラムの伝達関数を求めよ。



2. 問1で求めた伝達関数について、 $B = 2$ のときのボード線図(振幅、位相)の概略図(折れ線近似)を示せ。コーナーでの値と折れ線各部の傾き(dB/Dec)を記入すること。

## 課題3. 4

3. 次頁の回路図を参考にして、ブロックダイアグラムのシミュレーションを実施し、前ページ問2で求めた伝達関数の特性と一致していることを確認せよ。レポートでは、下記の特性について説明すること。

- 各コーナの角周波数での振幅と位相が問2の計算と一致するか
- $\omega \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty$ の振幅と位相の漸近値が問2の計算と一致するか
- 線分の傾きが一致するか(※)

※ シミュレーション結果のグラフによる傾きの調べ方

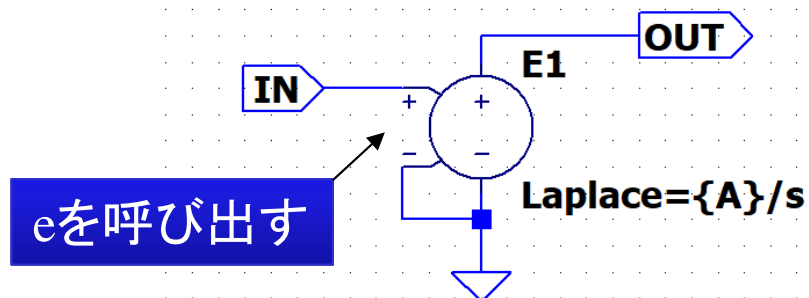
1. グラフ枠の上に表示されている調べたい曲線の変数を2回クリックするとカーソル1とカーソル2の点線が表示される
2. 傾きを調べたい範囲をカーソル1とカーソル2で挟む
3. カーソル位置での値を表示する、値読み取りウインドウのRatio枠内のMag.欄に振幅の傾きが表示される

**[重要]** 回路シミュレーションでは、AC解析の入力信号の振幅 = 1V, 位相 = 0 deg. に設定することにより、伝達関数を求めることができる。

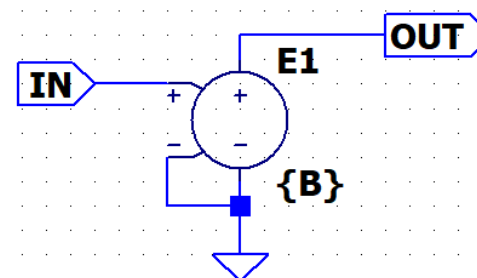
# 課題3. 4 (ブロック機能の作成)

1. 回路図エディタを用いて、下記の4種類の回路を入力。
  - 電圧制御電圧源は、Componentボタンで開いた部品リストからeを選ぶ
  - 完成したら、File – Save As... で保存(回路毎に別ファイルにする)

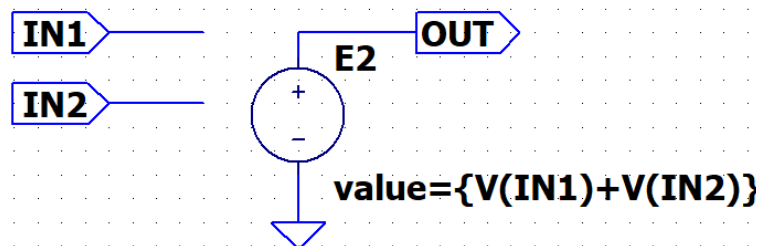
積分器(ファイル名func\_integ.asc)



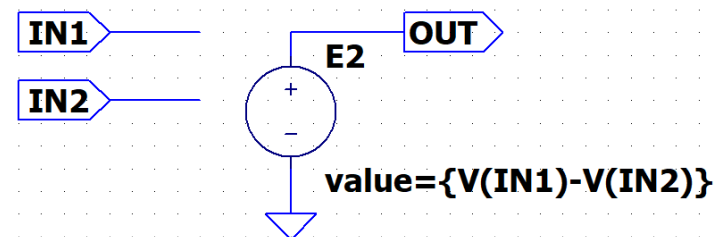
定数倍器(ファイル名func\_const.asc)



加算器(ファイル名func\_add2.asc)



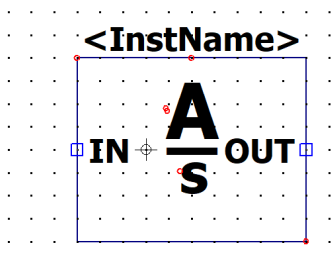
減算器(ファイル名func\_sub2.asc)



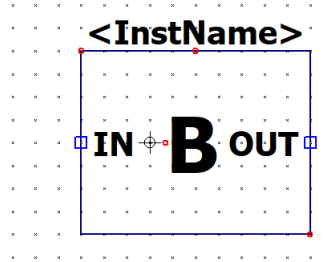
# 課題3. 4 (シンボルの作成)

1. 回路図を表示した状態で、メニューより、Hierarchy – Open or generate this Sheet's Symbolを選ぶ
2. シンボルを自動生成するか確認されるので、Yesを選択
3. シンボルエディタが起動するので、各回路に対応するシンボル(下図参照)を作成
  - シンボルの形状にこだわらないなら、デフォルトの形状でもよい
  - 編集コマンドは、メニューのDrawから選択する
4. 完成したシンボルを回路図と同じ場所に保存
  - ファイル名は自動的に回路図ファイル名.asyとなるので、変更しないこと

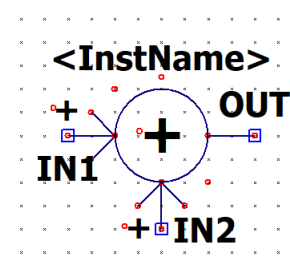
func\_integ.asy



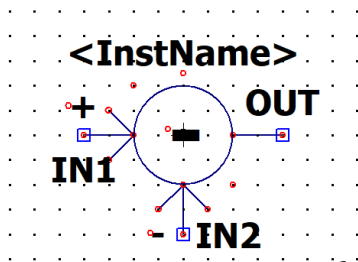
func\_const.asy



func\_add2.asy



func\_sub2.asy



# 課題3. 4 (回路図の作成)

1. 回路図エディタで、次ページの回路を作成
  - Settingsボタンより、Search Pathsタブ – Browseボタンをクリックして、動作モデルの回路とシンボルを保存したフォルダを指定
  - Componentボタンより、Componentフォームを起動し、Show欄で、シンボルを保存した場所を選ぶ
  - シンボルのファイル名(func\_integなど)を選んで、シンボルを呼び出す

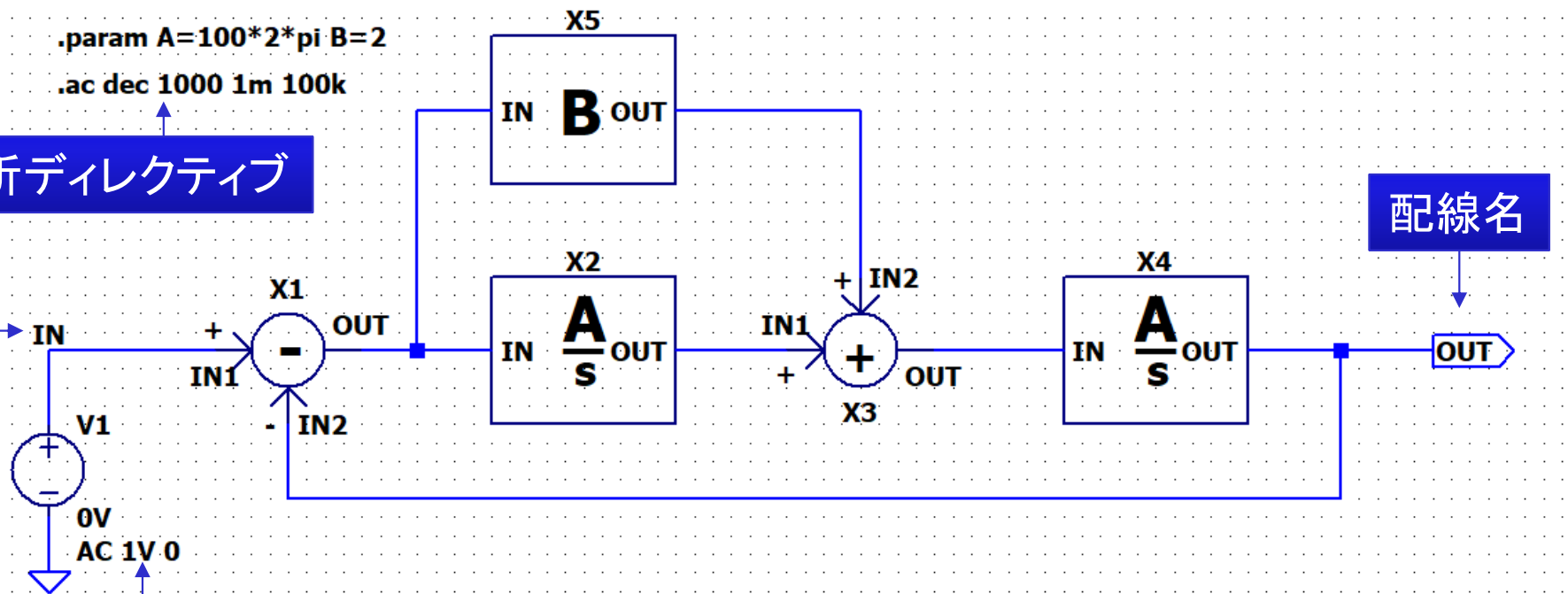
# 回路図の作成例

変数の値を設定

```
.param A=100*2*pi B=2  
.ac dec 1000 1m 100k
```

AC解析ディレクティブ

配線名



配線名

AC解析用電圧源の設定  
(振幅 = 1V, 位相 = 0deg.)

## 3. 4節のまとめ

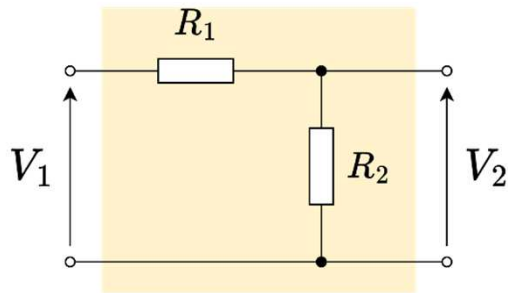
- 回路の機能と特性はブロックダイアグラムにより表される
  - ブロックの機能は、伝達関数、算術演算、機能名等で表す
  - ブロックダイアグラムの中のブロックを更に詳細なブロックダイアグラムで表し、最終的に、積分、微分、定数倍、加減算などの演算のみで表した詳細なブロックダイアグラムは回路に置き換えることができる

回路の行列表記

## 3.5 2端子対回路パラメータ

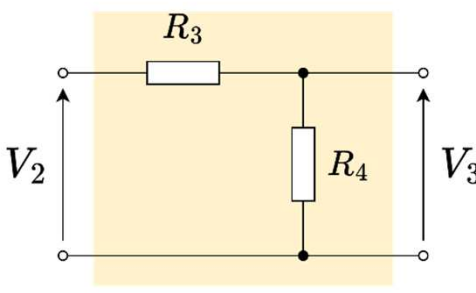
# 伝達関数の注意点

回路A



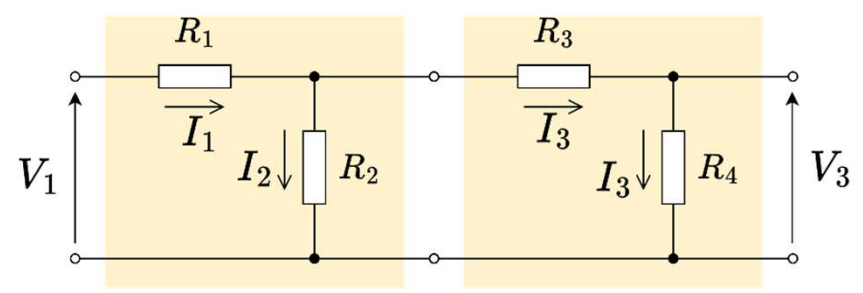
$$T_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

回路B



$$T_B = \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

回路AB(回路AとBの縦続接続)



$$T_{AB} = \frac{R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2}$$

回路Aと回路Bを縦続接続した回路ABの伝達関数 $T_{AB}$ は、回路Aの伝達関数 $T_A$ と回路Bの伝達関数 $T_B$ の積にならない。

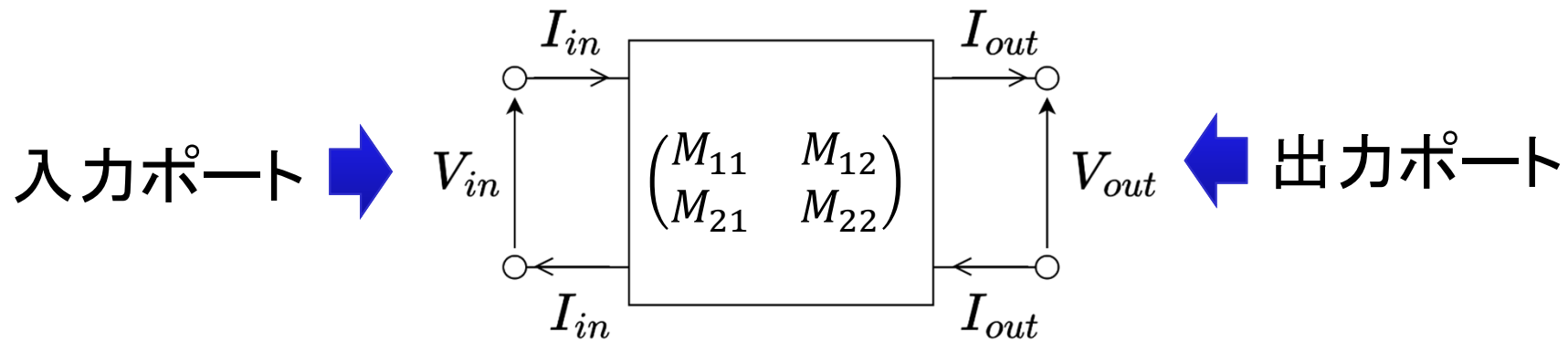
$$T_{AB} \neq T_A T_B$$

回路Aでは、 $I_1 = I_2$ であったが、回路ABでは、 $I_1 = I_2 + I_3$ になっている。この問題に対処するためには、電圧と電流の両方を入出力変数とする必要がある。(注)デジタル回路では、 $T_{AB} = T_A T_B$ となる。

# 2端子対回路パラメータ

2端子対回路パラメータ(Two-terminal pair network parameters)で回路を表すための条件

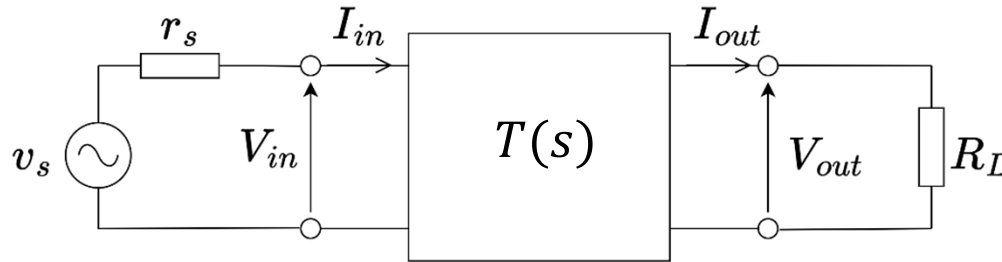
- 内部に独立電源を含まない
- 線形素子で回路が構成されている
- 各ポートの流入電流と流出電流が等しい(信号源、負荷を接続)



線形回路であれば、4つの変数  $V_{in}$ ,  $I_{in}$ ,  $V_{out}$ ,  $I_{out}$  の間の関係は、2次正方行列により表すことができる。

# 伝達関数と2端子対回路パラメータの違い

## 伝達関数

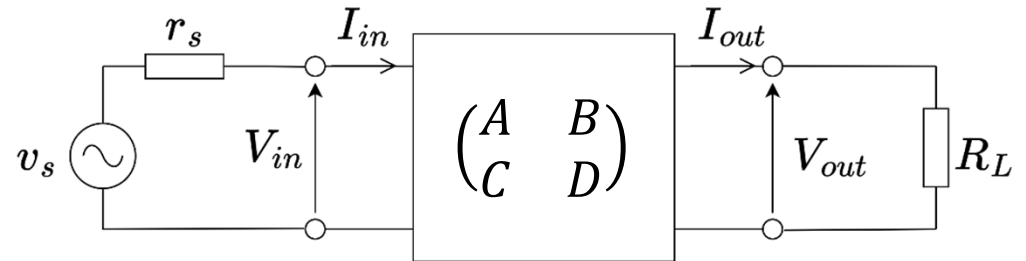


$$V_{out} = T(s)V_{in}$$

(または、 $I_{out} = T(s)I_{in}$  )

伝達関数は、電圧値または電流値の片方だけで求められるが、外部回路の特性( $R_L$ )によって変化する(完全にはBlack boxにならない)。

## 2端子対回路パラメータ



$$\begin{pmatrix} V_{in} \\ I_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{out} \\ I_{out} \end{pmatrix}$$

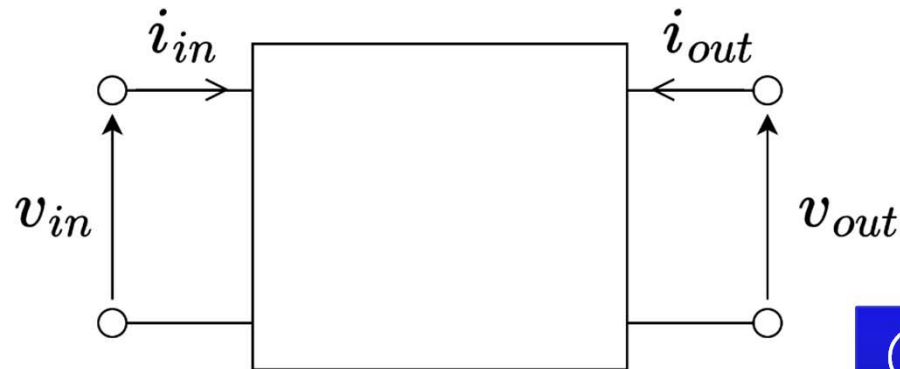
二端子対回路網パラメータは、電流と電圧の両方の値が必要だが、外部回路の影響を受けない(完全にBlack box化される)。

# 伝達関数とF行列の使い分け

| 表現   | 主に使われる場所          | 適用範囲                                          | 特徴                                                                                                                   |
|------|-------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 伝達関数 | ブロックダイアグラムを構成する部品 | アナログ、デジタル、ミクスツシグナル回路(※)に対応(機械特性や光学特性もモデル化できる) | <ul style="list-style-type: none"><li>• 信号の種類を問わない</li><li>• 信号源と負荷を接続した状態で求める必要がある(算出には信号源と負荷のインピーダンスが必要)</li></ul> |
| F行列  | 回路図を構成する部品        | 入出力は、アナログ電圧、電流のみ                              | <ul style="list-style-type: none"><li>• 入出力信号が、電流と電圧の両方</li><li>• 行列要素が信号源と負荷の影響を受けない</li></ul>                      |

※ アナログ信号とデジタル信号が混在した処理を行う回路

# よく使用される2端子対回路パラメータ



(注意) 電圧、電流は、 $s$ または $j\omega$ の関数。

Yパラメータ

$$\begin{pmatrix} i_{in} \\ i_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{in} \\ v_{out} \end{pmatrix}$$

Zパラメータ

$$\begin{pmatrix} v_{in} \\ v_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{in} \\ i_{out} \end{pmatrix}$$

Hパラメータ

$$\begin{pmatrix} v_{in} \\ i_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{in} \\ v_{out} \end{pmatrix}$$

Fパラメータ

$$\begin{pmatrix} v_{in} \\ i_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{out} \\ -i_{out} \end{pmatrix}$$

他のパラメータと $i_{out}$ の  
符号が異なるので注意

# Y, Z, Hパラメータの算出方法

## Yパラメータ

$$y_{11} = \left. \frac{i_{in}}{v_{in}} \right|_{v_{out}=0} \quad (\text{S})$$

$$y_{12} = \left. \frac{i_{in}}{v_{out}} \right|_{v_{in}=0} \quad (\text{S})$$

$$y_{21} = \left. \frac{i_{out}}{v_{in}} \right|_{v_{out}=0} \quad (\text{S})$$

$$y_{22} = \left. \frac{i_{out}}{v_{out}} \right|_{v_{in}=0} \quad (\text{S})$$

## Zパラメータ

$$z_{11} = \left. \frac{v_{in}}{i_{in}} \right|_{i_{out}=0} \quad (\Omega)$$

$$z_{12} = \left. \frac{v_{in}}{i_{out}} \right|_{i_{in}=0} \quad (\Omega)$$

$$z_{21} = \left. \frac{v_{out}}{i_{in}} \right|_{i_{out}=0} \quad (\Omega)$$

$$z_{22} = \left. \frac{v_{out}}{i_{out}} \right|_{i_{in}=0} \quad (\Omega)$$

## Hパラメータ

$$h_{11} = \left. \frac{v_{in}}{i_{in}} \right|_{v_{out}=0} \quad (\Omega)$$

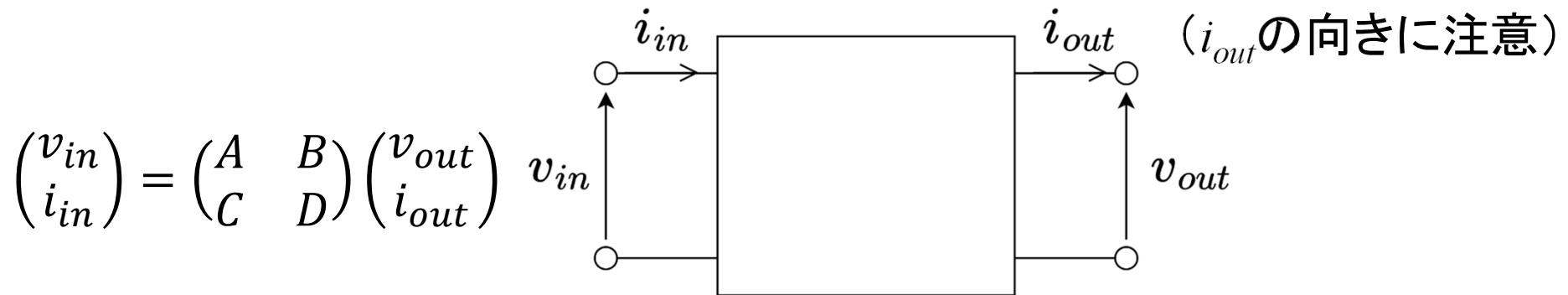
$$h_{12} = \left. \frac{v_{in}}{v_{out}} \right|_{i_{in}=0}$$

$$h_{21} = \left. \frac{i_{out}}{i_{in}} \right|_{v_{out}=0}$$

$$h_{22} = \left. \frac{i_{out}}{v_{out}} \right|_{i_{in}=0} \quad (\text{S})$$

$v = 0$  条件はポートを短絡すると実現できる。 $i = 0$  条件はポートを開放すると実現できる。

# Fパラメータの算出方法



Fパラメータ

$$A = \left. \frac{v_{in}}{v_{out}} \right|_{i_{out}=0}$$

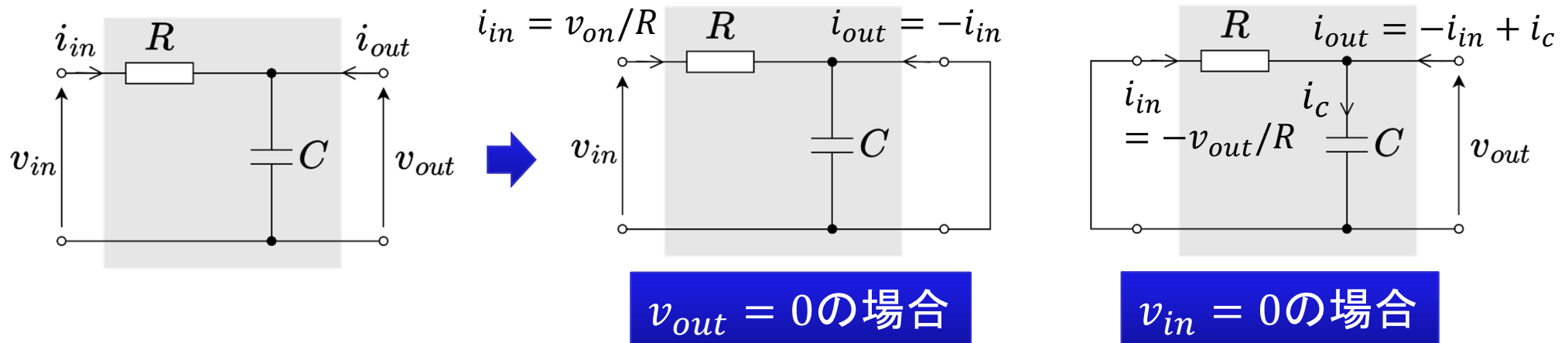
$$B = \left. \frac{v_{in}}{i_{out}} \right|_{v_{out}=0} \quad (\Omega)$$

$$C = \left. \frac{i_{in}}{v_{out}} \right|_{i_{out}=0} \quad (\text{S})$$

$$D = \left. \frac{i_{in}}{i_{out}} \right|_{v_{out}=0}$$

# Yパラメータの計算例

Yパラメータは、入力ポートと出力ポートの短絡条件から求められる。

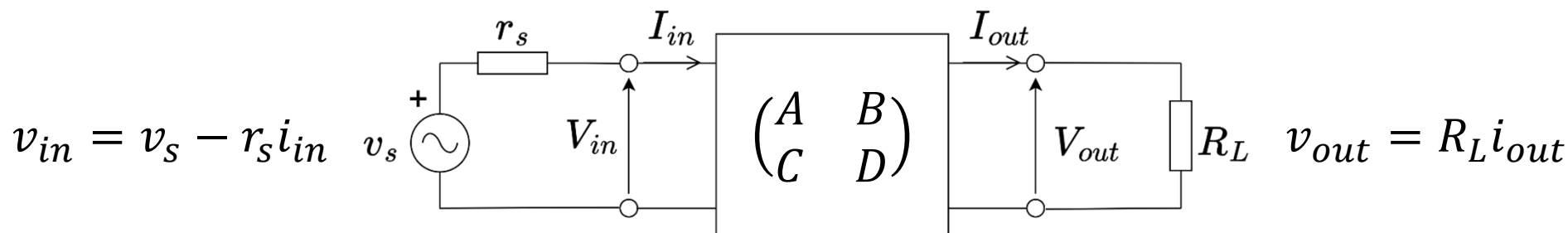


$$y_{11} = \left. \frac{i_{in}}{v_{in}} \right|_{v_{out}=0} = \frac{1}{R} \quad y_{12} = \left. \frac{i_{in}}{v_{out}} \right|_{v_{in}=0} = -\frac{1}{R}$$

$$y_{21} = \left. \frac{i_{out}}{v_{in}} \right|_{v_{out}=0} = -\frac{1}{R} \quad y_{22} = \left. \frac{i_{out}}{v_{out}} \right|_{v_{in}=0} = \frac{-i_{in} + i_c}{v_{out}} = \frac{1}{R} + sC$$

# 2端子対回路パラメータと伝達関数の関係

負荷を考慮することにより伝達関数が求められる。



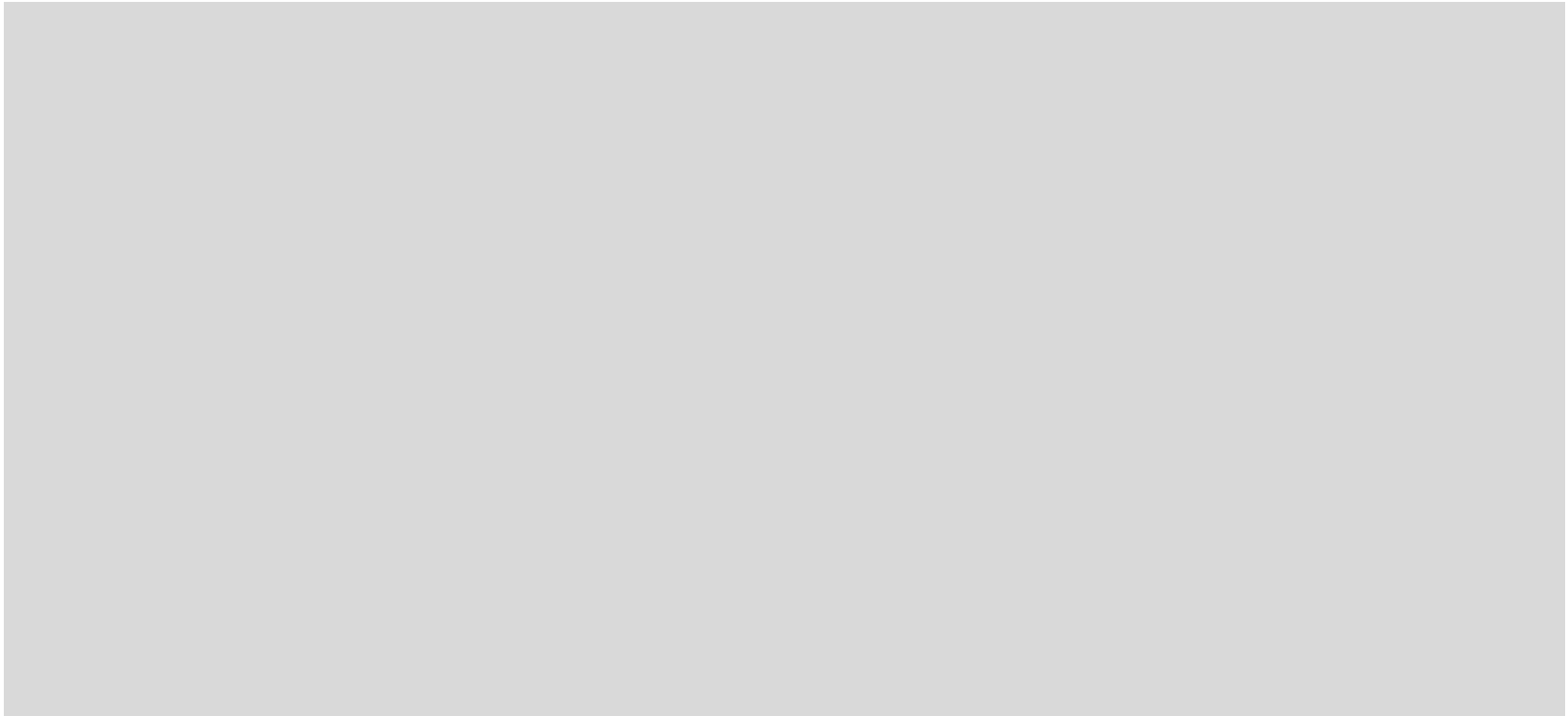
$$\begin{pmatrix} v_{in} \\ i_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{out} \\ i_{out} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_L \text{ の影響を考慮}} \begin{pmatrix} v_{in} \\ i_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{out} \\ \frac{v_{out}}{R_L} \end{pmatrix}$$

$$v_{in} = \left( A + \frac{B}{R_L} \right) v_{out} \text{ より、 } T(s) = \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{1}{A + \frac{B}{R_L}}$$

(参考)  $r_s$  の影響を考慮した伝達関数  $v_{out}/v_s$  を求める場合もある。

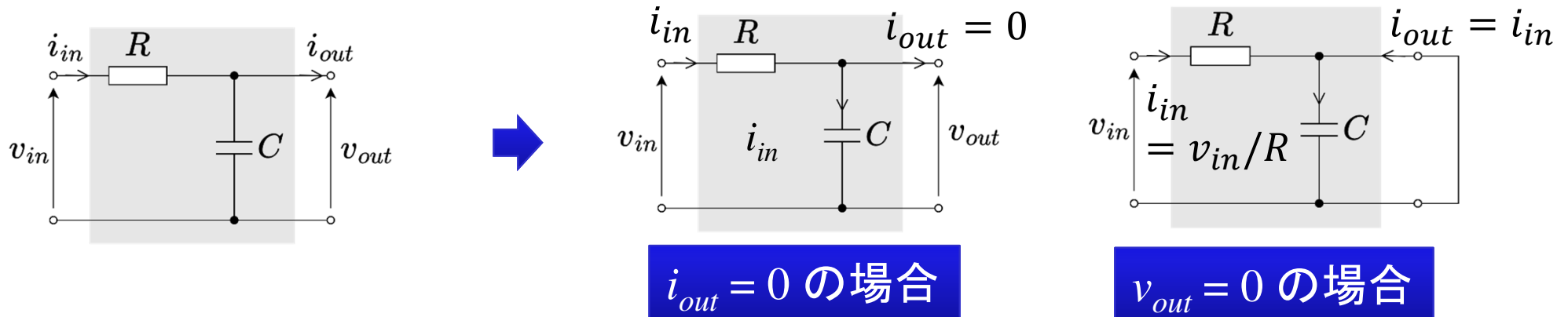
# クイズ2

1. 前スライドの回路について、 $i_{out} = 0$  (出力端子開放) における周波数領域伝達関数をYパラメータで表せ。
2. 出力端子を $R_L$  終端としたときの周波数領域伝達関数をYパラメータで表せ。



# Fパラメータの計算例

Fパラメータは、出力ポートの開放条件と短絡条件から求められる。



$$A = \left. \frac{v_{in}}{v_{out}} \right|_{i_{out}=0} = \frac{v_{in}}{\frac{1}{\frac{sC}{R + \frac{1}{sC}}} v_{in}} = 1 + sCR$$

$$B = \left. \frac{v_{in}}{i_{out}} \right|_{v_{out}=0} = \frac{v_{in}}{i_{in}} = \frac{v_{in}}{\frac{1}{R} v_{in}} = R$$

$$C = \left. \frac{i_{in}}{v_{out}} \right|_{i_{out}=0} = \frac{i_{in}}{\frac{1}{sC} i_{in}} = j\omega C$$

$$D = \left. \frac{i_{in}}{i_{out}} \right|_{v_{out}=0} = \frac{i_{in}}{i_{in}} = 1$$

# クイズ3

1. 前スライドの回路について、 $i_{out} = 0$  (出力端子開放) における伝達関数をFパラメータで表せ。
2. 出力端子を $R_L$ で終端したときの伝達関数をFパラメータで表せ。



# 回路の接続とパラメータ行列1

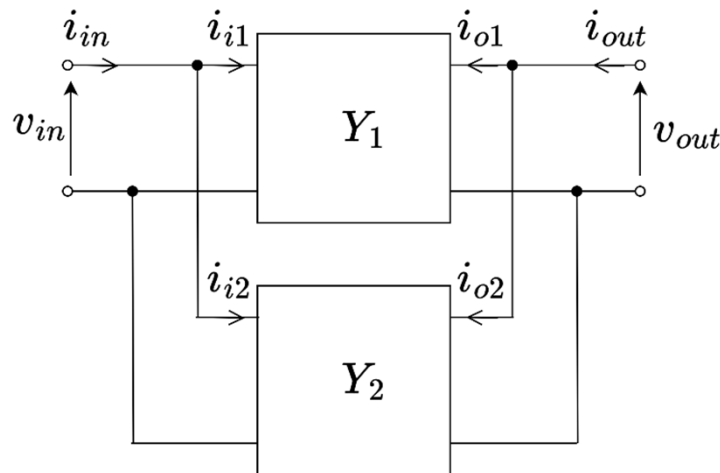
並列接続(Parallel connection) → Y行列の加算に相当。

直列接続(Series connection) → Z行列の加算に相当。

並列接続



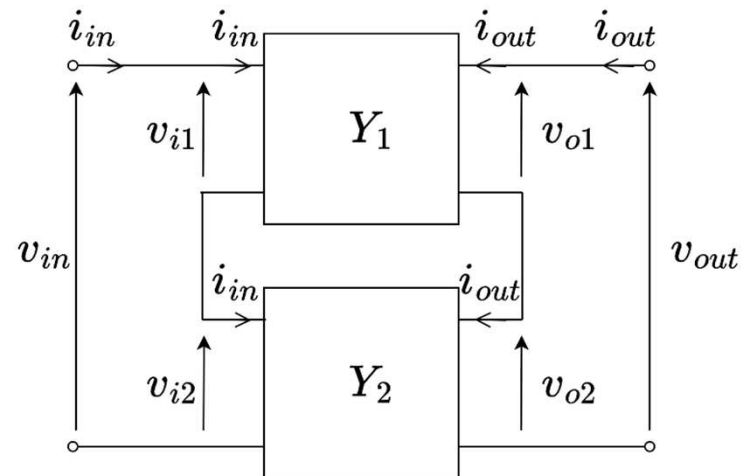
Y行列の加算



直列接続



Z行列の加算



$$\begin{pmatrix} i_{i1} \\ i_{o1} \end{pmatrix} = Y_1 \begin{pmatrix} v_{in} \\ v_{out} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i_{i2} \\ i_{o2} \end{pmatrix} = Y_2 \begin{pmatrix} v_{in} \\ v_{out} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i_{in} \\ i_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{i1} \\ i_{o1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_{i2} \\ i_{o2} \end{pmatrix} = (Y_1 + Y_2) \begin{pmatrix} v_{in} \\ v_{out} \end{pmatrix}$$

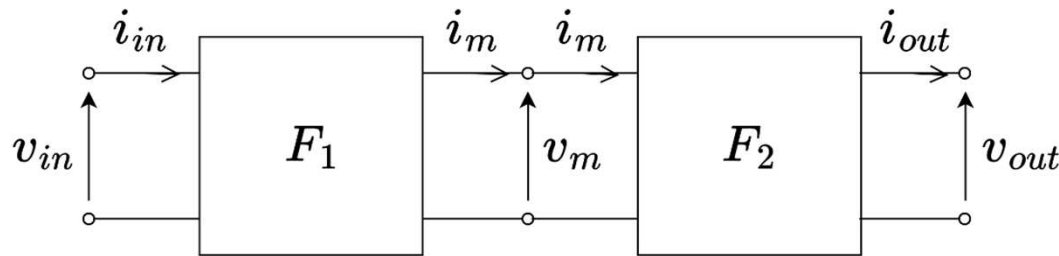
$$\begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{o1} \end{pmatrix} = Z_1 \begin{pmatrix} i_{in} \\ i_{out} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} v_{i2} \\ v_{o2} \end{pmatrix} = Z_2 \begin{pmatrix} i_{in} \\ i_{out} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_{in} \\ v_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{o1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{i2} \\ v_{o2} \end{pmatrix} = (Z_1 + Z_2) \begin{pmatrix} i_{in} \\ i_{out} \end{pmatrix}$$

# 回路の接続とパラメータ行列2

縦続接続(Cascaded connection) → F行列の積に相当。

縦続接続 → F行列の積

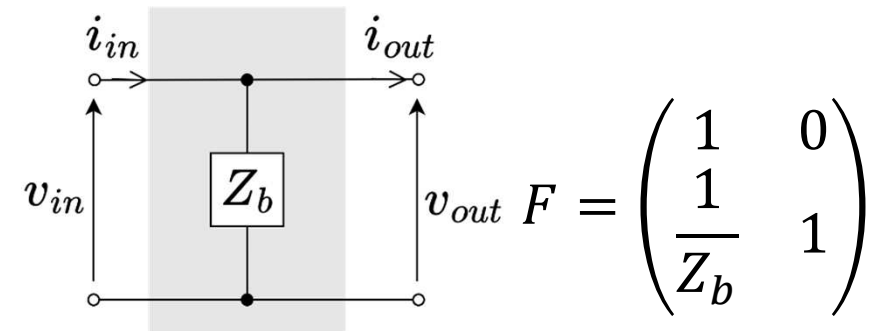
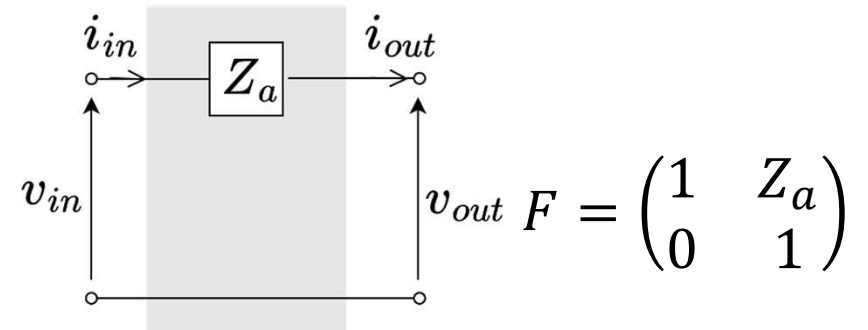


$$\begin{pmatrix} v_{in} \\ i_{in} \end{pmatrix} = F_1 \begin{pmatrix} v_m \\ i_m \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} v_m \\ i_m \end{pmatrix} = F_2 \begin{pmatrix} v_{out} \\ i_{out} \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{pmatrix} v_{in} \\ i_{in} \end{pmatrix} = F_1 F_2 \begin{pmatrix} v_{out} \\ i_{out} \end{pmatrix}$$

インピーダンス1個の回路のF行列  
(記憶しておくこと)



# Fパラメータの簡単な求め方

縦続接続した複数の回路に分割すると簡単な行列の積で表される。

(ただし、行列の積は、一般的には順序を入れ替えられないことに注意。)

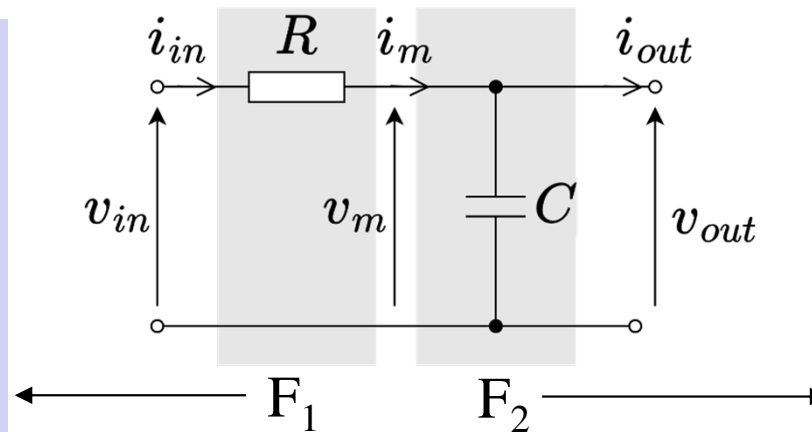
$$\begin{pmatrix} v_{in} \\ i_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_m \\ i_m \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \left. \frac{v_{in}}{v_j} \right|_{i_j=0} = 1$$

$$B_1 = \left. \frac{v_{in}}{i_j} \right|_{v_j=0} = R$$

$$C_1 = \left. \frac{i_{in}}{v_j} \right|_{i_j=0} = 0$$

$$D_1 = \left. \frac{i_{in}}{i_j} \right|_{v_j=0} = 1$$



$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_{in} \\ i_{in} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{out} \\ i_{out} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ sC & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{out} \\ i_{out} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + sCR & R \\ sC & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{out} \\ i_{out} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} v_m \\ i_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{out} \\ i_{out} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \left. \frac{v_j}{v_{out}} \right|_{i_{out}=0} = 1$$

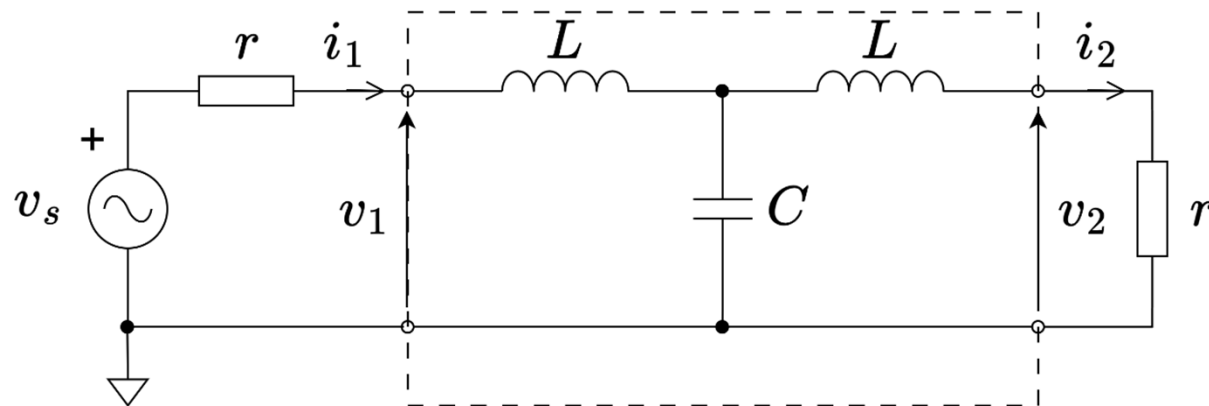
$$B_2 = \left. \frac{v_j}{i_{out}} \right|_{v_{out}=0} = 0$$

$$C_2 = \left. \frac{i_j}{v_{out}} \right|_{i_{out}=0} = sC$$

$$D_2 = \left. \frac{i_j}{i_{out}} \right|_{v_{out}=0} = 1$$

# 課題3. 5

1. 下図の四角で囲まれた回路ブロックのF行列を求めよ。ただし、 $s$ を変数として表すこと。初期値はゼロとすること。
2. 1.で求めたF行列の要素を用いて、信号源の内部抵抗 $r$ を考慮した伝達関数 $T(s) = \frac{v_2}{v_s}$ を求めよ。
3. 伝達関数 $T(s)$ のポールを全て求めよ。(ヒント)ポールの一つは、 $s = -r/L$ である。
4. ポールが $s$ 平面上で、原点を中心とする半径 $r/L$ の円周上にあるとき、 $L/C$ と $r$ の関係を求めよ。
5.  $L = 80\text{nH}$ ,  $C = 64\text{pF}$ ,  $r = 50\Omega$ のとき、 $s$ 平面上のポールの位置を図で示せ。



## 3. 5節のまとめ

- 伝達関数は、入力ポート、出力ポートに接続される回路の影響を受ける
- 線形回路は、2端子対回路パラメータにより表せる
  - 2端子対回路網パラメータは、入力ポート、出力ポートに接続される回路の影響を受けない
  - 代表的な2端子対回路網パラメータに、Yパラメータ、Zパラメータ、Hパラメータ、Fパラメータなどがある
  - 2端子対回路網パラメータは、各ポートの信号変数に2変数が必要なので、ブロックダイアグラムには使用されない
  - (参考)2端子対回路網パラメータは、半導体デバイスの交流特性を表すために使用されることが多い
- 2端子対回路パラメータを用いて、伝達関数を表すことができる