第７章　フィルター

増幅器を用いた伝達関数の回路実装

フィルタの伝達関数

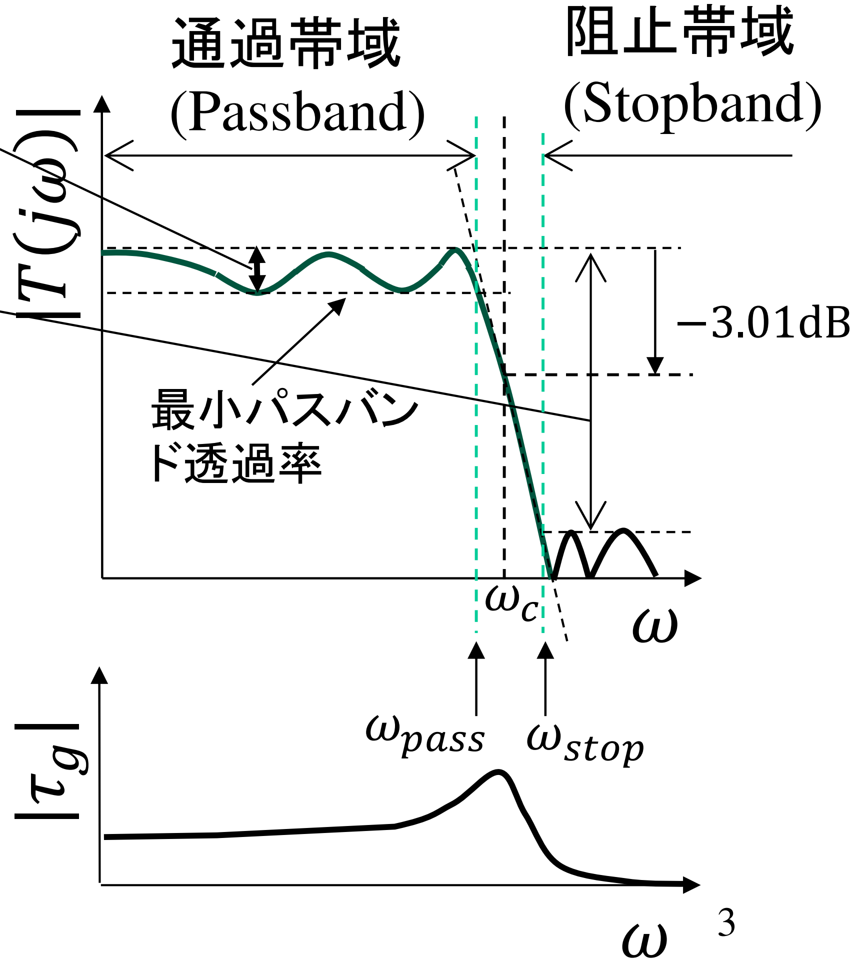
7.1 伝達関数の設計

フィルタの性能指標

1. 通過帯域リプル
   - 通過帯域の入力信号波形が変化しないことが望ましい→リプルが小さいほどよい
2. 阻止帯域減衰率
   - 阻止帯域の信号が出力されないことが望ましい＋急峻な特性(dB/Dec)
3. 群遅延
   - 通過帯域で一定であることが望ましい

群遅延の定義 $\tau_g = -\dfrac{d\theta(\omega)}{d\omega}$

$$T(j\omega) = |T(j\omega)|e^{-j\theta}$$



群遅延

複数周波数成分を持つ波形は、周波数によって位相が変化すると波形も変化する　→　位相歪（第1章参照）

$$\sin(\omega t + \theta(\omega)) = \sin\left(\omega\left(t + \frac{\theta(\omega)}{\omega}\right)\right) = \sin(\omega(t - \tau_p))$$

$$\tau_p = -\frac{\theta(\omega)}{\omega}$$ ← 位相遅延(Phase delay)

τ_pが定数（位相と周波数が比例）であれば位相歪がない（この指標は、帯域毎の評価ができない）

$$\tau_g = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$$ ← 群遅延(Group delay)

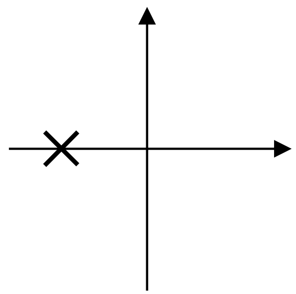
通過帯域でτ_gが定数であれば位相歪がない（単位は秒）

フィルタのタイプと伝達関数－１

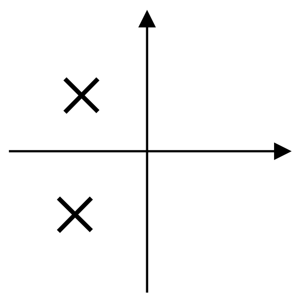
フィルタは、特定の周波数帯域の信号を取り出したり、消去したりする機能を持っている。伝達関数の形（ポールとゼロの配置）によって機能が決定される。

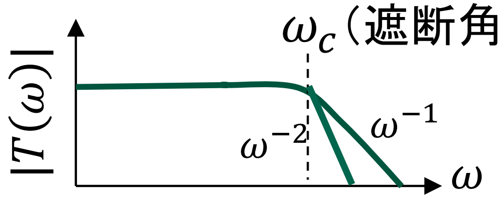
低域通過
LPF (Low-pass filter)

$$\frac{\omega_c}{s+\omega_c}$$



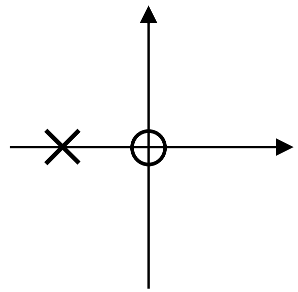
$$\frac{\omega_c^2}{s^2+\frac{\omega_c}{Q}s+\omega_c}$$



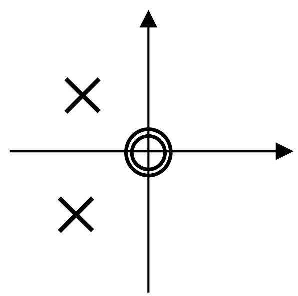


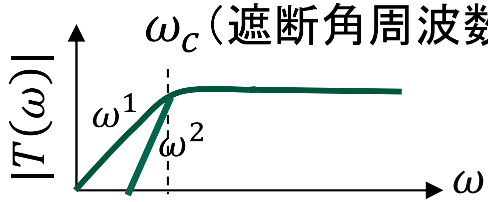
高域通過
HPF (High-pass filter)

$$\frac{s}{s+\omega_c}$$



$$\frac{s^2}{s^2+\frac{\omega_c}{Q}s+\omega_c^2}$$

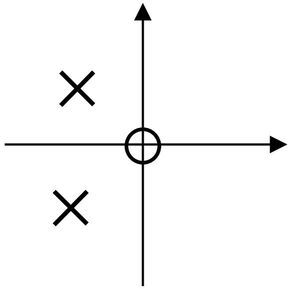


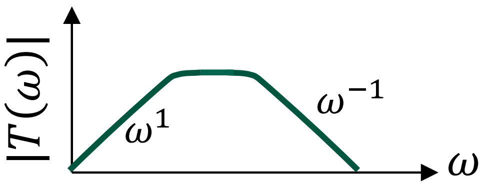


フィルタのタイプと伝達関数－２

帯域通過
BPF (Band-pass filter)

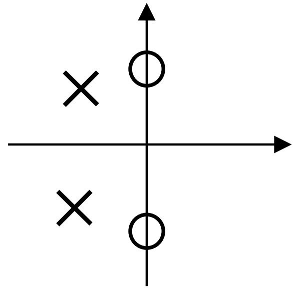
$$\frac{\frac{\omega_0}{Q}s}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}$$

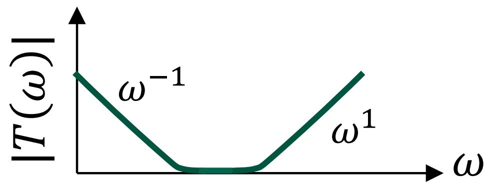




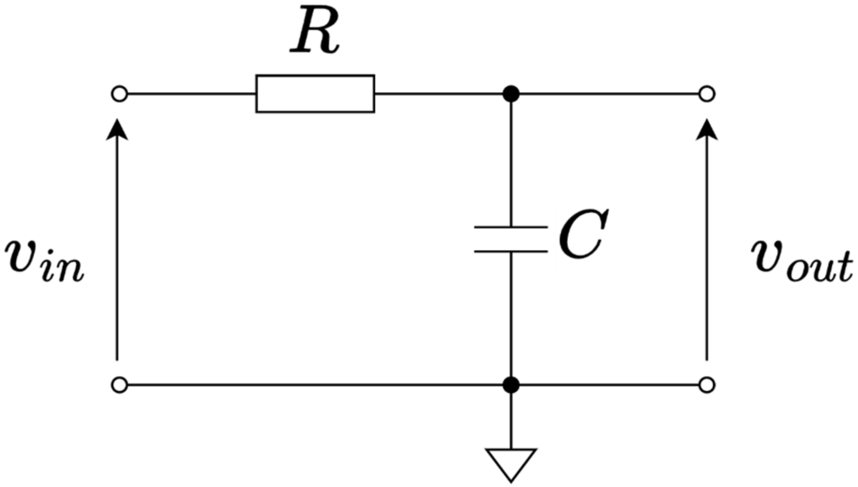
帯域阻止
BEF (Band-Elimination filter)

$$\frac{s^2+\omega_0^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}$$





1次LPFの回路例



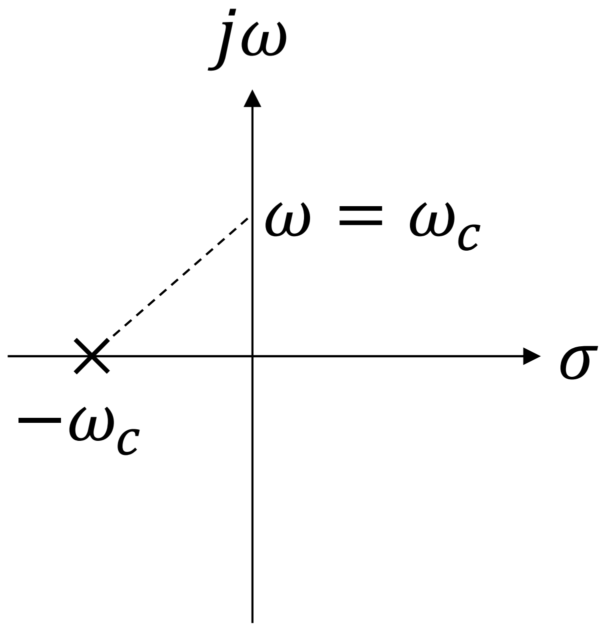
$$T(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

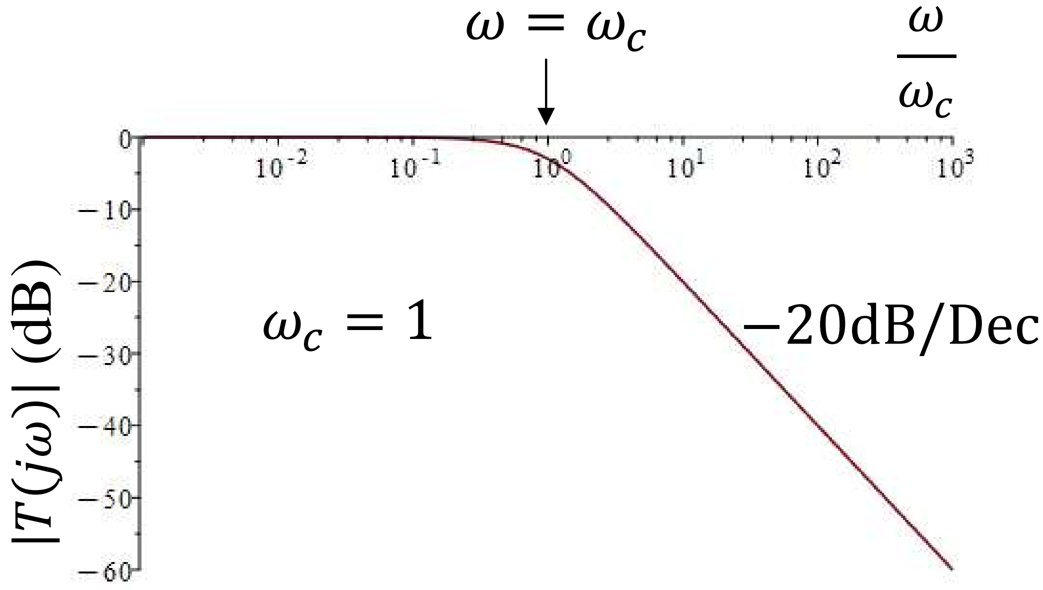
$$\omega_c = \frac{1}{RC} \quad \Rightarrow \quad T(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} = \xrightarrow{s = j\omega} \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

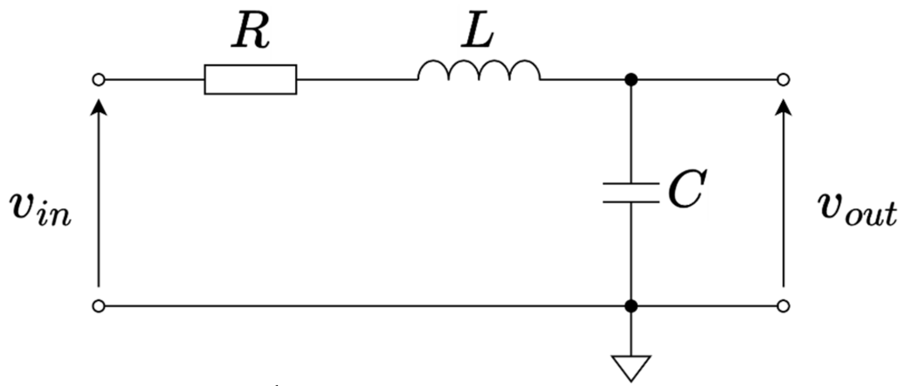
1次LPFのボーデ線図

ポール　$s_p = -\omega_c$





2次LPFの回路例



$$T(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \omega_0 \dfrac{L}{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

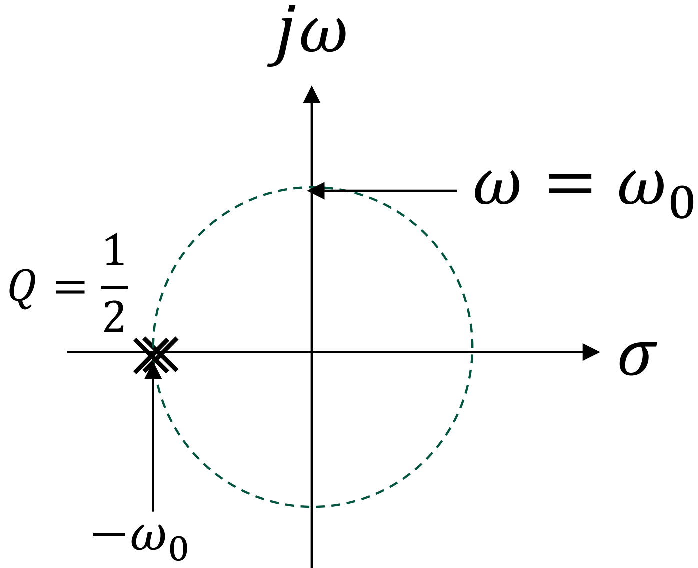
$$= \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \xrightarrow{s=j\omega} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega}$$

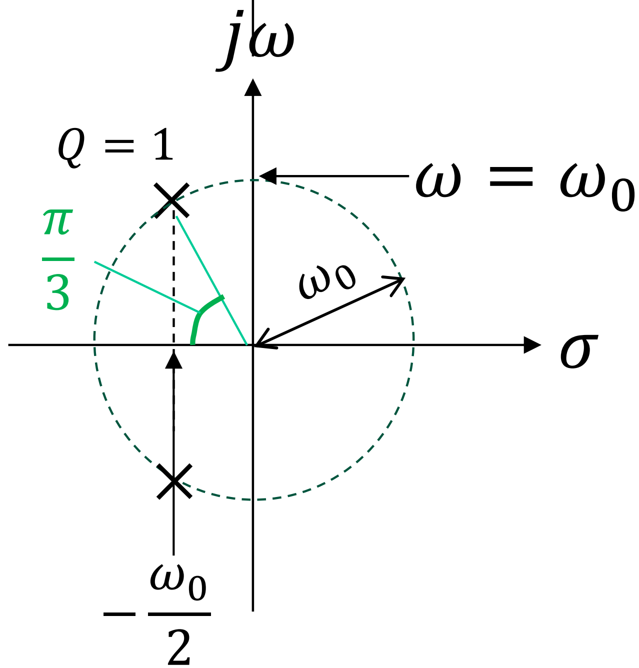
$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\omega\right)^2}}$$

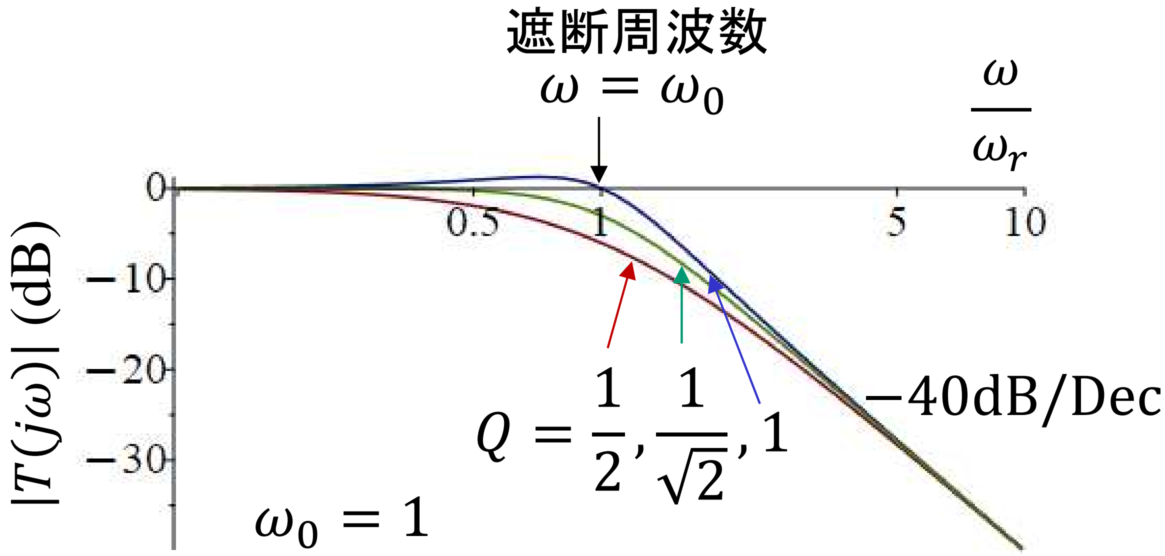
2次LPFのボーデ線図

ポール $s_p = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm j\dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}$

$|s_p| = \omega_0$（半径ω_0の円）







高次LPF

3次以上のフィルタの周波数特性を最適化するポールの配置方法のうち、代表的なものとして下記の方式が使用されることが多い。

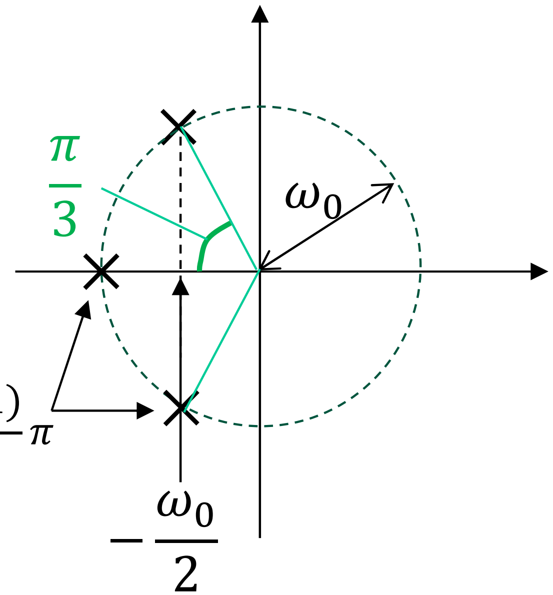
名称	特長
バターワース(Butterworth)特性	通過帯域にリプルがない
チェビシェフ(Chebyshev)特性	減衰特性が急峻（通過帯域にリプルが発生）
ベッセル(Bessel)特性	群遅延特性が平坦に近い（減衰が緩やか）

3次バターワース特性

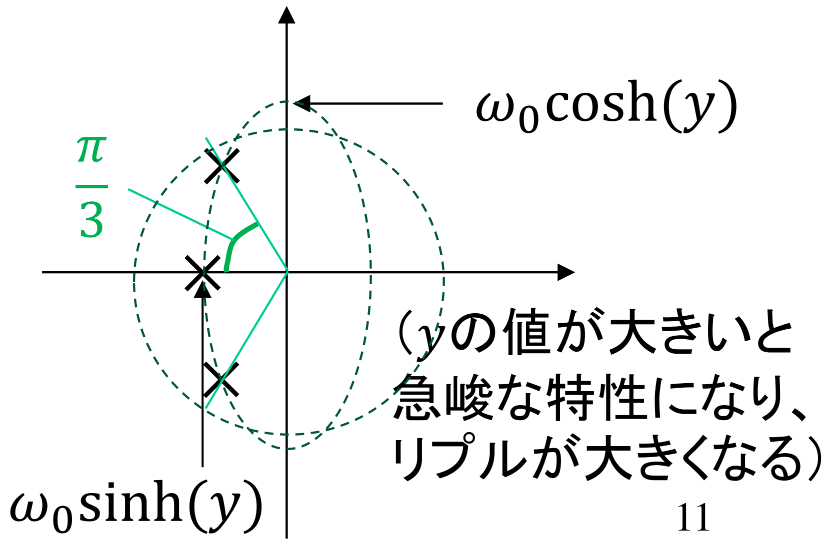
2πを等角度に分割して配置

$$\frac{n+1}{2n}\pi, \frac{n+1}{2n}\pi, \cdots \frac{n+(2n-1)}{2n}\pi$$

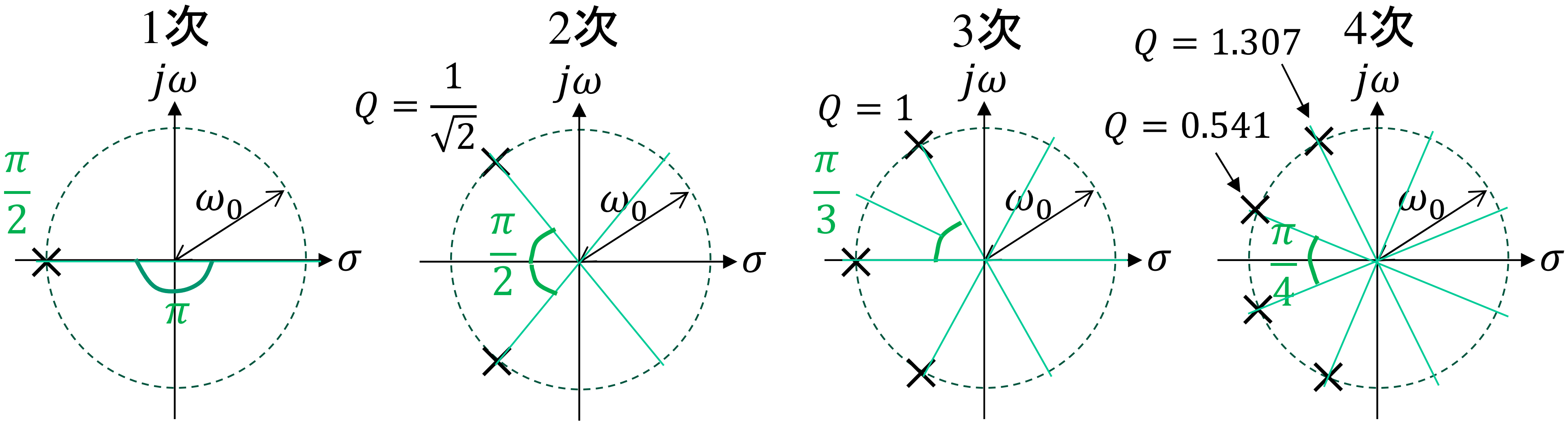
（n：次数）



3次チェビシェフ特性



バターワースフィルタのポール配置

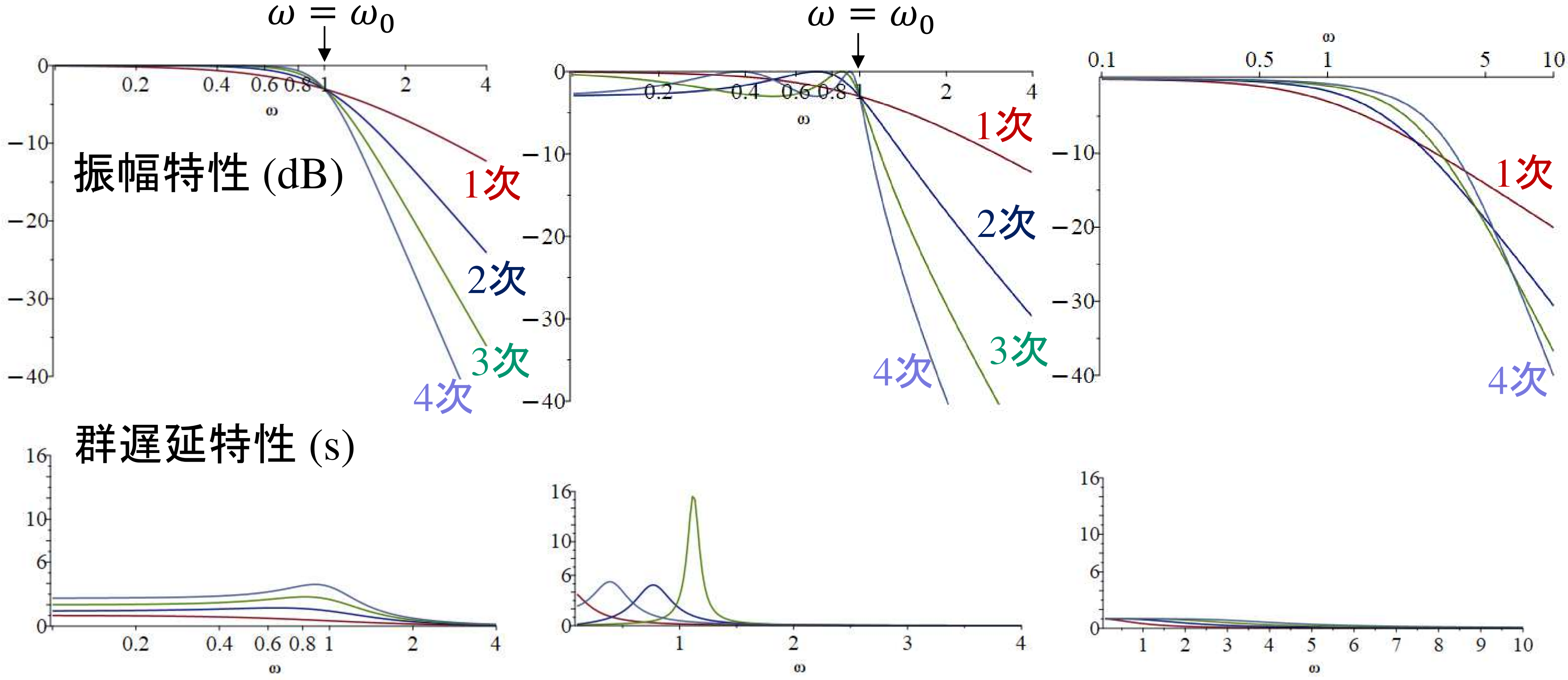


2次(分母)伝達関数を用いてポールを作る場合のQの値

$$s_p = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1} \rightarrow \omega_0 \cos\theta = \frac{\omega_0}{2Q} \rightarrow Q = \frac{1}{2\cos\theta}$$ (θは実数軸からの角度)

奇数次の伝達関数は $\frac{1}{s+1}$ で実数軸上にポールを追加する

周波数特性の比較



バターワース特性　　チェビシェフ特性　　ベッセル特性

課題７．１

1. 3次バターワースLPFの伝達関数$T(s)$を求めよ。ただし、ポールを配置する円の半径をω_0、また$\omega = 0$における振幅を$|T(s)| = 1$とする。
2. 問１で求めた伝達関数の周波数特性$T(j\omega)$について、$\omega = \omega_0$における振幅$|T(j\omega)|$と位相$\angle T(j\omega)$を求めよ。
3. 問１で求めた伝達関数の周波数特性$T(j\omega)$について、角周波数ωを変数として、位相を求めよ。
4. 問１で求めた伝達関数$T(s)$について、ボーデ線図の概略を示せ。$\omega \to 0, \omega = \omega_0, \omega \to \infty$における振幅と位相、および振幅特性の傾きを示すこと。

ブロックダイアグラムから電子回路への翻訳

7.2 ACTIVE RCフィルタによる回路実装

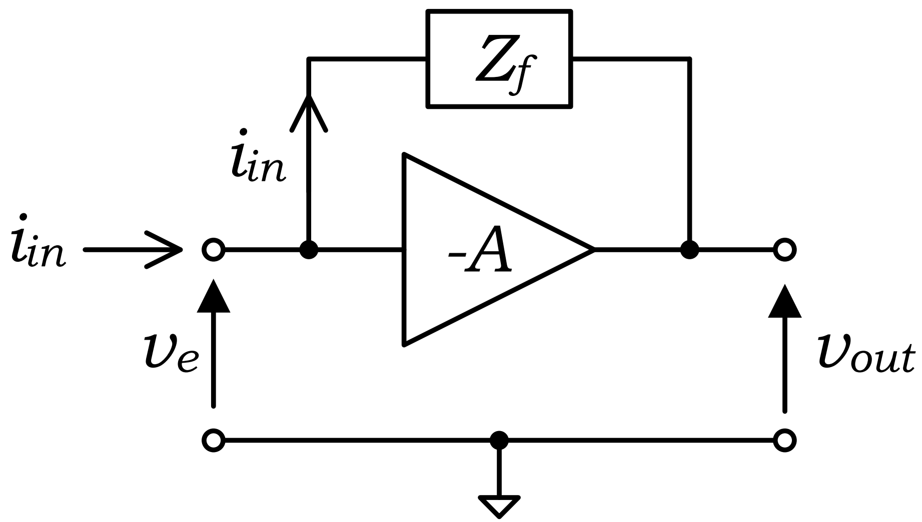
フィルタの回路方式

信号形式	連続時間/離散時間	主な回路方式	主な使用目的（使用部品）
アナログフィルタ	連続時間フィルタ	LCフィルタ	電源、高周波回路(RF)など (L, C)
		Active RCフィルタ（本節で説明）	ADC, DAC, PLL, DLL, センサなど (R, C, OPA)
		gm-Cフィルタ	高速信号処理全般 (C, OTA: Operational transconductance Amplifier)
	離散時間フィルタ	スイッチトキャパシタフィルタ	ADC, 高精度信号処理全般 (Switch, C, OPA)
ディジタルフィルタ (DSP)	離散時間フィルタ	有限インパルス応答 (FIR) フィルタ	
		無限インパルス応答 (IIR) フィルタ	

※ 殆どのフィルタはDSPで実現されるが、原理的にディジタル化できない重要機能ブロックが幾つかあり、アナログフィルタが使われている。

PLL: Phase locked loop, DLL: Delay locked loop（周波数制御されたキャリア信号、クロック信号を発生する回路）

負帰還増幅器の入力電圧



入力インピーダンス≈ ∞
電圧利得≈ ∞

$$\begin{cases} v_e = Z_f i_{in} + v_{out} \\ v_{out} = -A v_e \end{cases}$$

$$v_e = Z_f i_{in} - A v_e$$

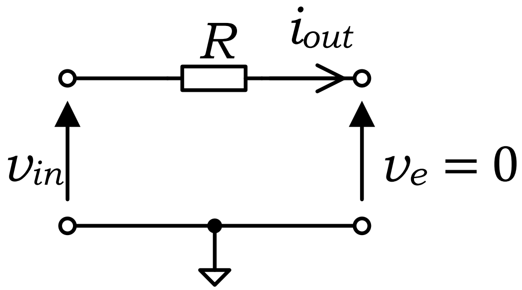
$$v_e = \frac{Z_f}{1 + A} i_{in} \xrightarrow{\mathrm{A} \to \infty} 0$$

高利得の増幅器にNFBを行うと、増幅器の入力ポートをGNDに接続しなくても、自動的に$v_e = 0$となる。直流電圧でも成り立つ場合は仮想接地(Virtual ground)または仮想短絡(Virtual short)呼ばれる。（電子回路及び演習C、Dで詳しく扱う。）

定数倍と微分

（注意）以下の回路は、出力ポートに負帰還した増幅器を接続することを前提として、$v_e = 0$とする。

電圧-電流変換

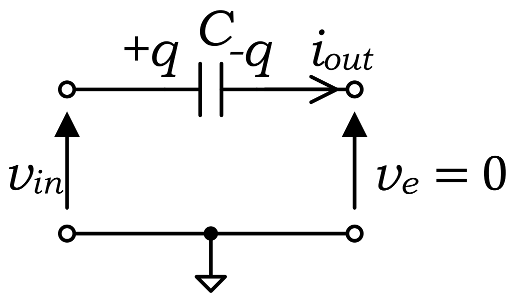


$$v_{in} = Ri_{out} + v_e = Ri_{out}$$

$$i_{out} = \frac{1}{R} v_{in}$$

入力電圧を電流に変換して出力
（変換係数 $\frac{1}{R}$）

微分電圧-電流変換

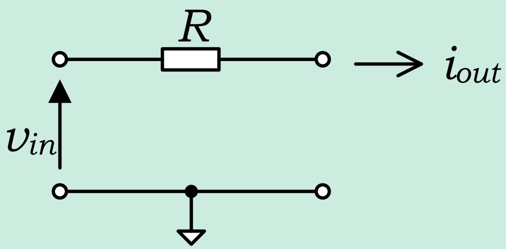
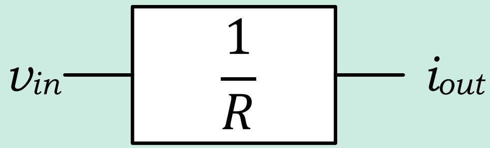
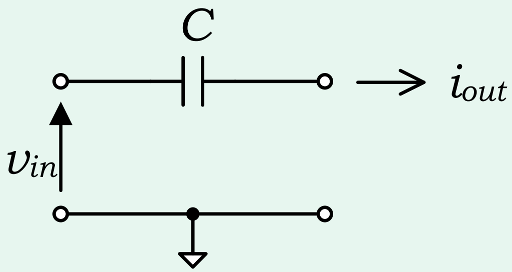
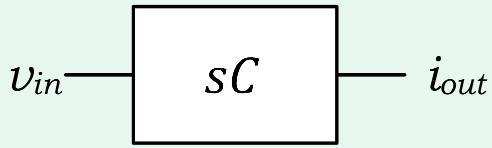
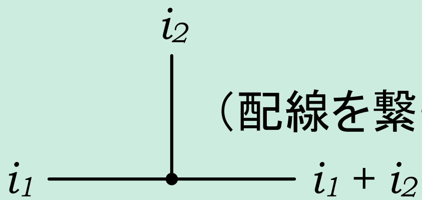
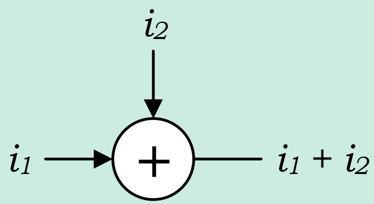


$$q(t) = \int_0^t i_{out}(\tau)\, d\tau = Cv_{in}(t)$$

$$i_{out} = C\frac{dv_{in}(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} i_{out}(s) = sCv_{in}(s)$$

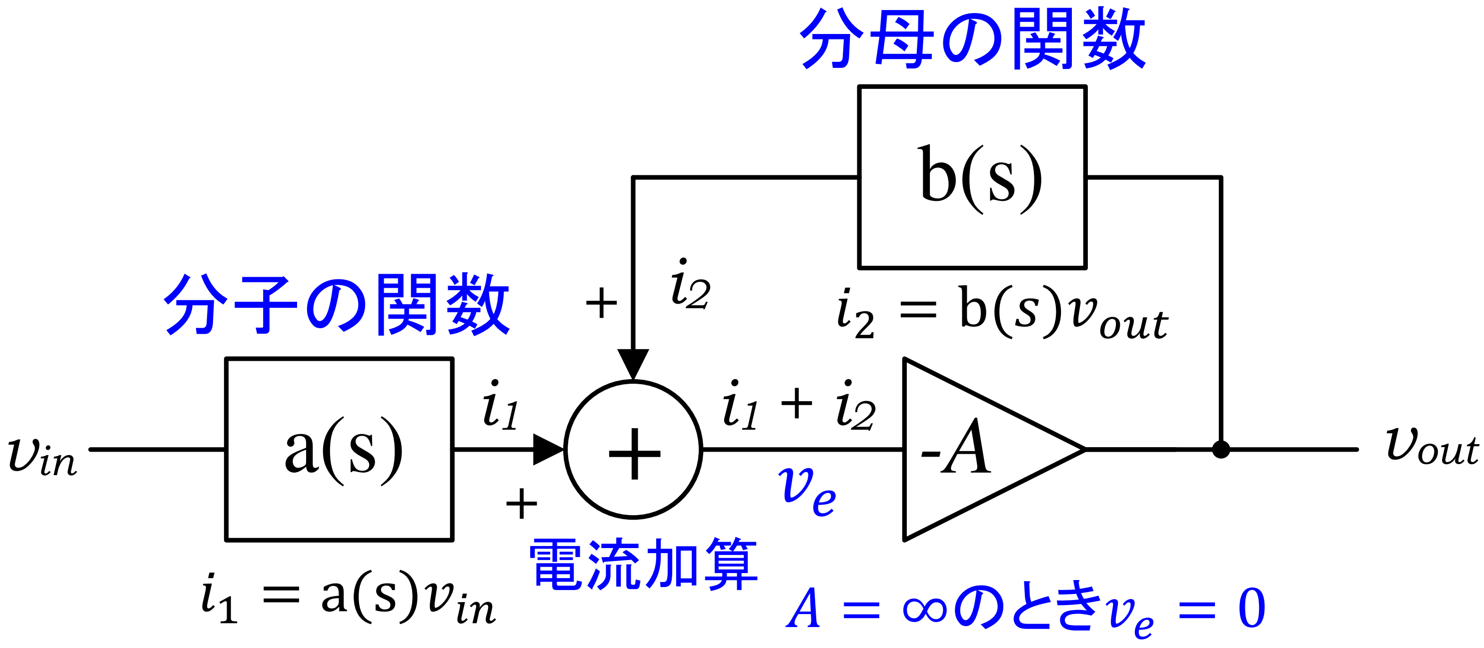
入力電圧を微分して電流を出力
（変換係数sC）

使用部品

機能	要素回路	ブロックダイアグラム
電圧-電流変換 （電圧→電流）		
微分電圧-電流変換 （電圧→電流）		
電流加算 （電流→電流）	 （配線を繋ぐだけ）	

（参考）R、C、増幅器を部品として用いた回路はアクティブRCフィルタと呼ばれる。

伝達関数と回路の対応関係



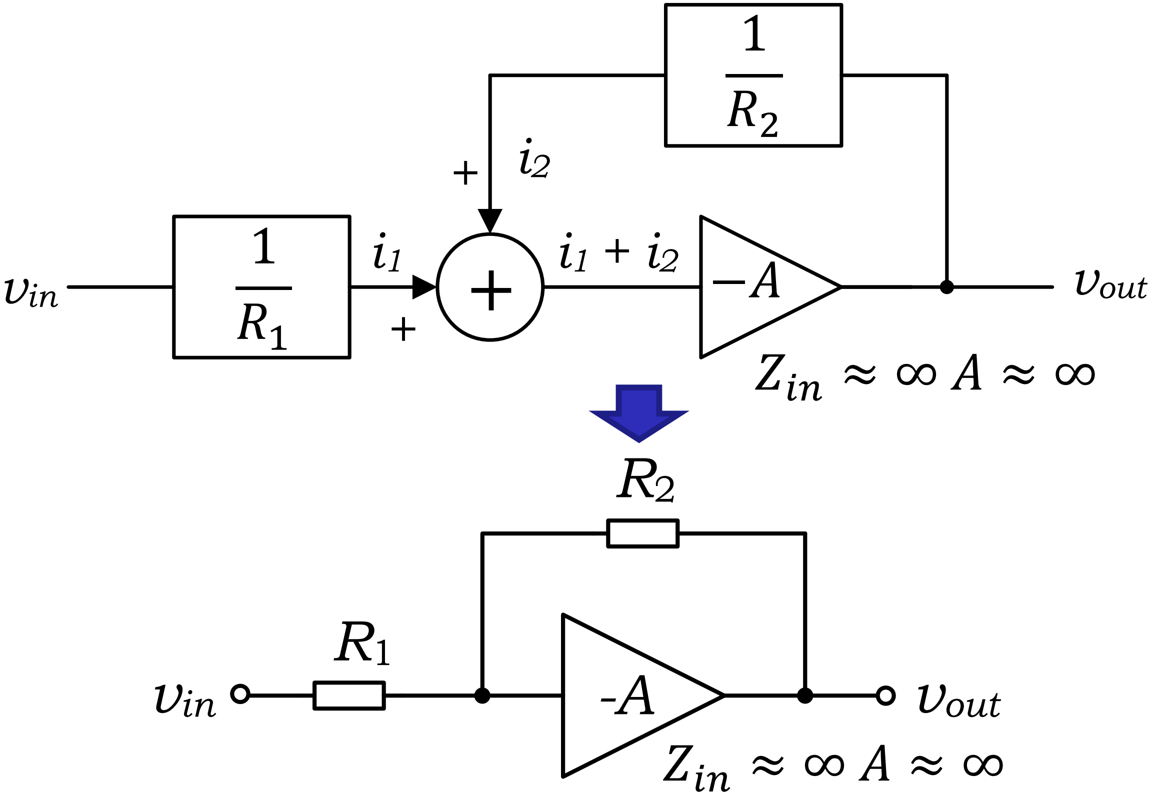
増幅器の入力インピーダンスが∞のとき、

$$i_1 + i_2 = \mathrm{a(s)}v_{in} + \mathrm{b}(s)v_{out} = 0 \longrightarrow \frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{\mathrm{a(s)}}{\mathrm{b(s)}}$$

入力信号側のブロックは伝達関数の分子、出力をフィードバックするブロックは伝達関数の分母の関数を表す。

定数倍回路

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = K$$（分子分母ともに定数）



増幅器の入力インピーダンスが∞のとき、

$$i_1 + i_2 = 0$$

$$\frac{1}{R_1} v_{in} + \frac{1}{R_2} v_{out} = 0$$

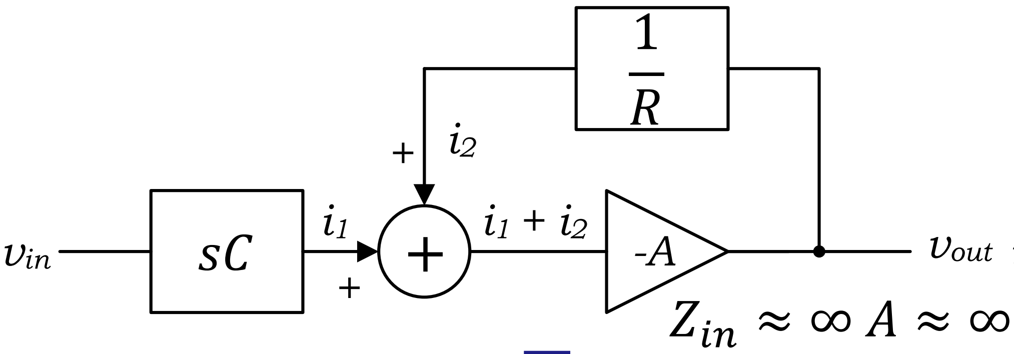
$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2}} = -\frac{R_2}{R_1}$$

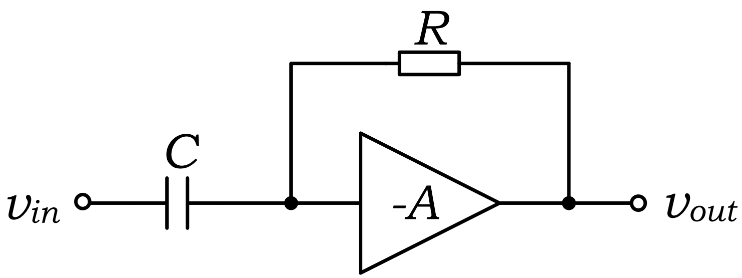
増幅器が、$Z_{in} \approx \infty$ $A \approx \infty$のとき、回路方程式から求めた周波数領域の伝達関数と一致することを確かめてみよう。

微分回路と積分回路

微分

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = Ks$$ （分子が定数項なしで1次）

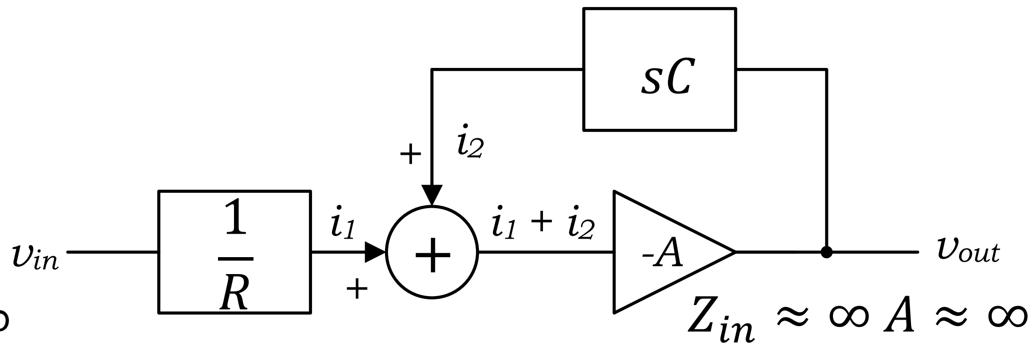


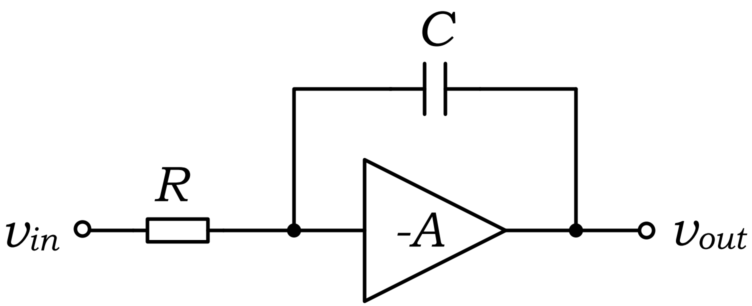


$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = -CRs$$

積分

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{K}{s}$$ （分母が定数項なしで1次）





$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{1}{CR}\frac{1}{s}$$

微分と積分のボーデ線図

微分の伝達関数

$$H_I(s) = sKT$$

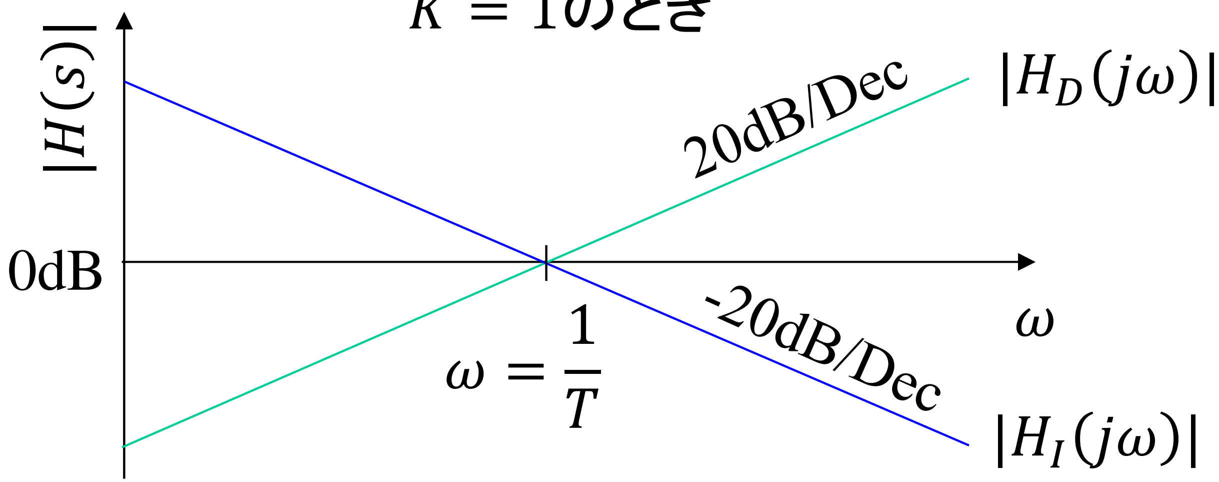
$$H_I(j\omega) = j\omega KT$$

積分の伝達関数

$$H_D(s) = \frac{K}{sT}$$

$$H_D(j\omega) = \frac{K}{j\omega T}$$

$K = 1$のとき



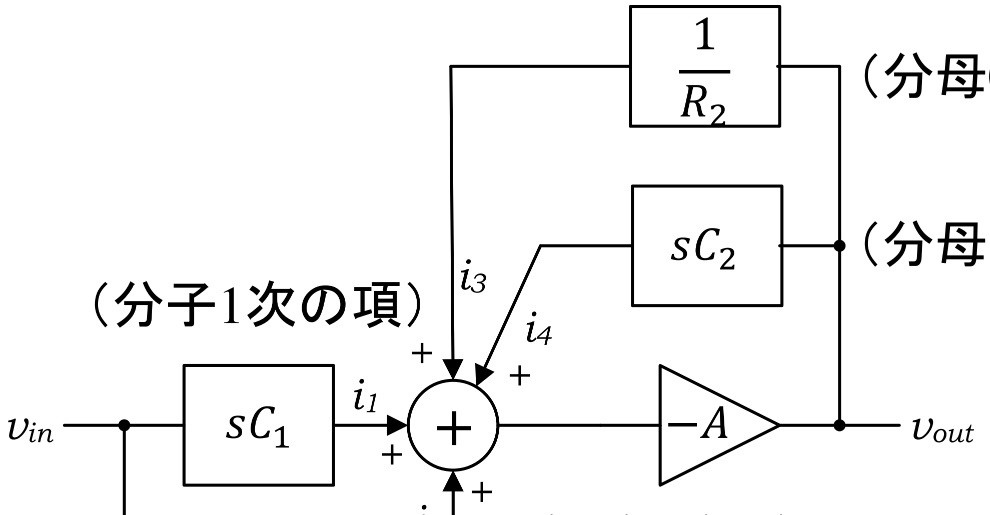
（参考）係数Kは利得（無次元）、Tは時定数(s)と呼ばれる。

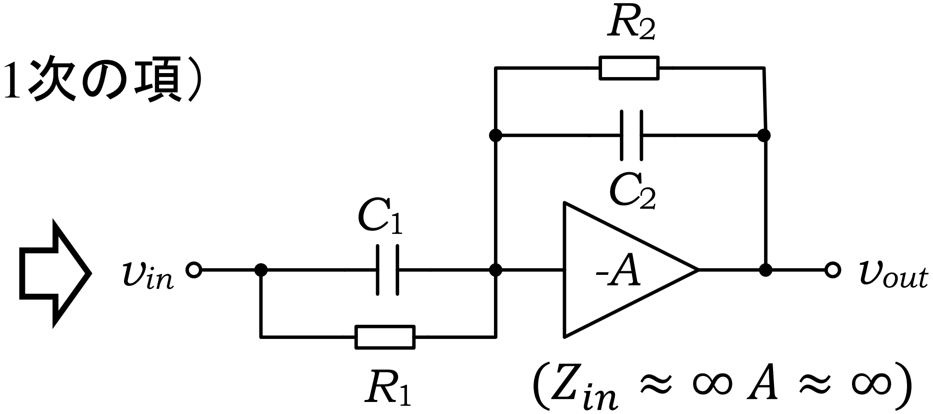
1次伝達関数

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{as+b}{cs+d}$$ （分子分母ともに1次関数）

（分母0次の項）

（分母1次の項）





$i_1 + i_2 + i_1 + i_2 = 0$

$(Z_{in} \approx \infty\ A \approx \infty)$

$(Z_{in} \approx \infty\ A \approx \infty)$

（分子0次の項）

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = \left(sC_1 + \frac{1}{R_1}\right) v_{in} + \left(sC_2 + \frac{1}{R_2}\right) v_{out} = 0$$

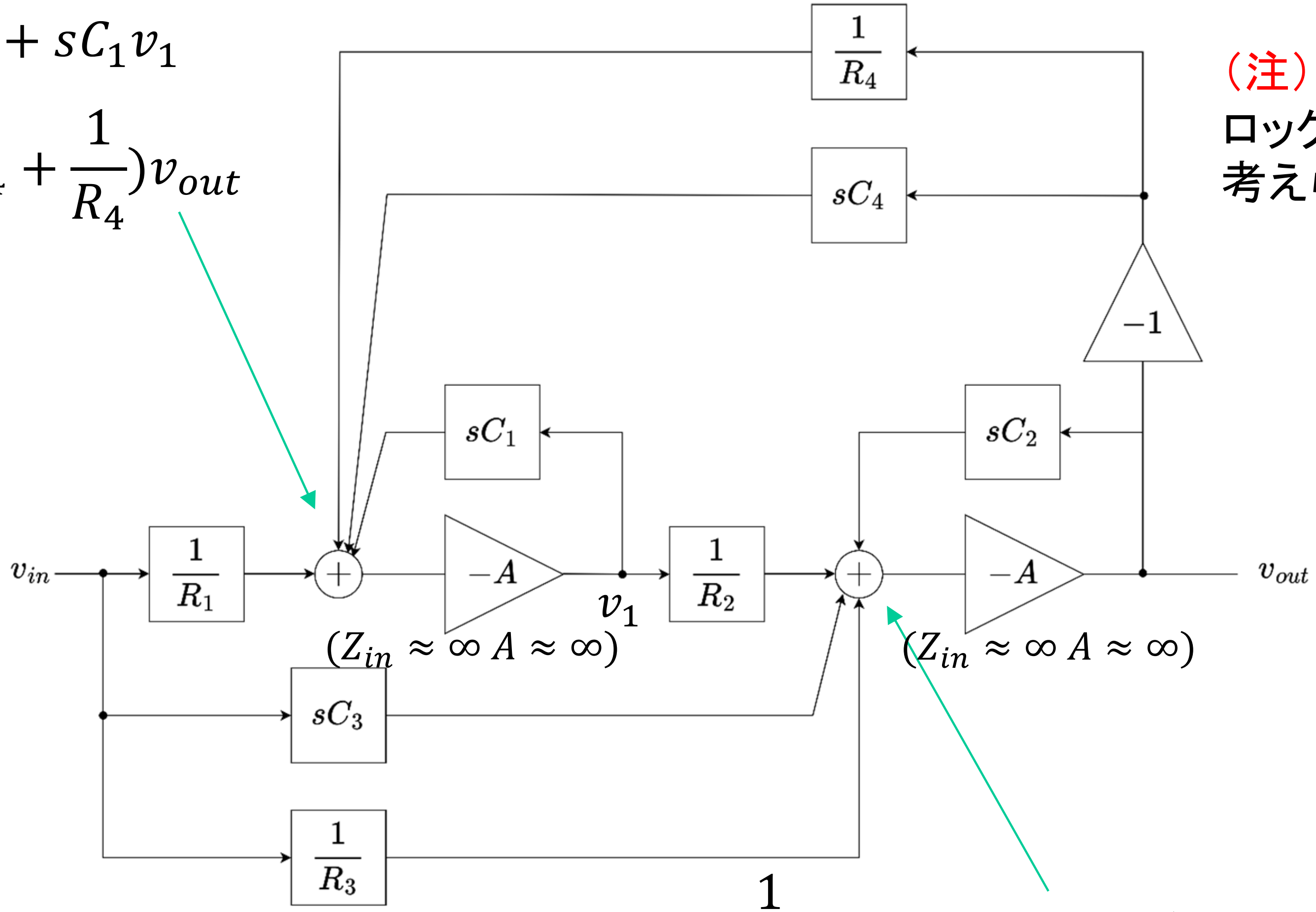
$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{sC_1 + \frac{1}{R_1}}{sC_2 + \frac{1}{R_2}} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{sC_1R_1 + 1}{sC_2R_2 + 1}$$

2次伝達関数のブロックダイアグラム

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = a\frac{bs^2 + cs + 1}{ds^2 + es + 1}$$ （分子分母ともに2次関数）

$$\frac{1}{R_1}v_{in} + sC_1v_1 - (sC_4 + \frac{1}{R_4})v_{out} = 0$$

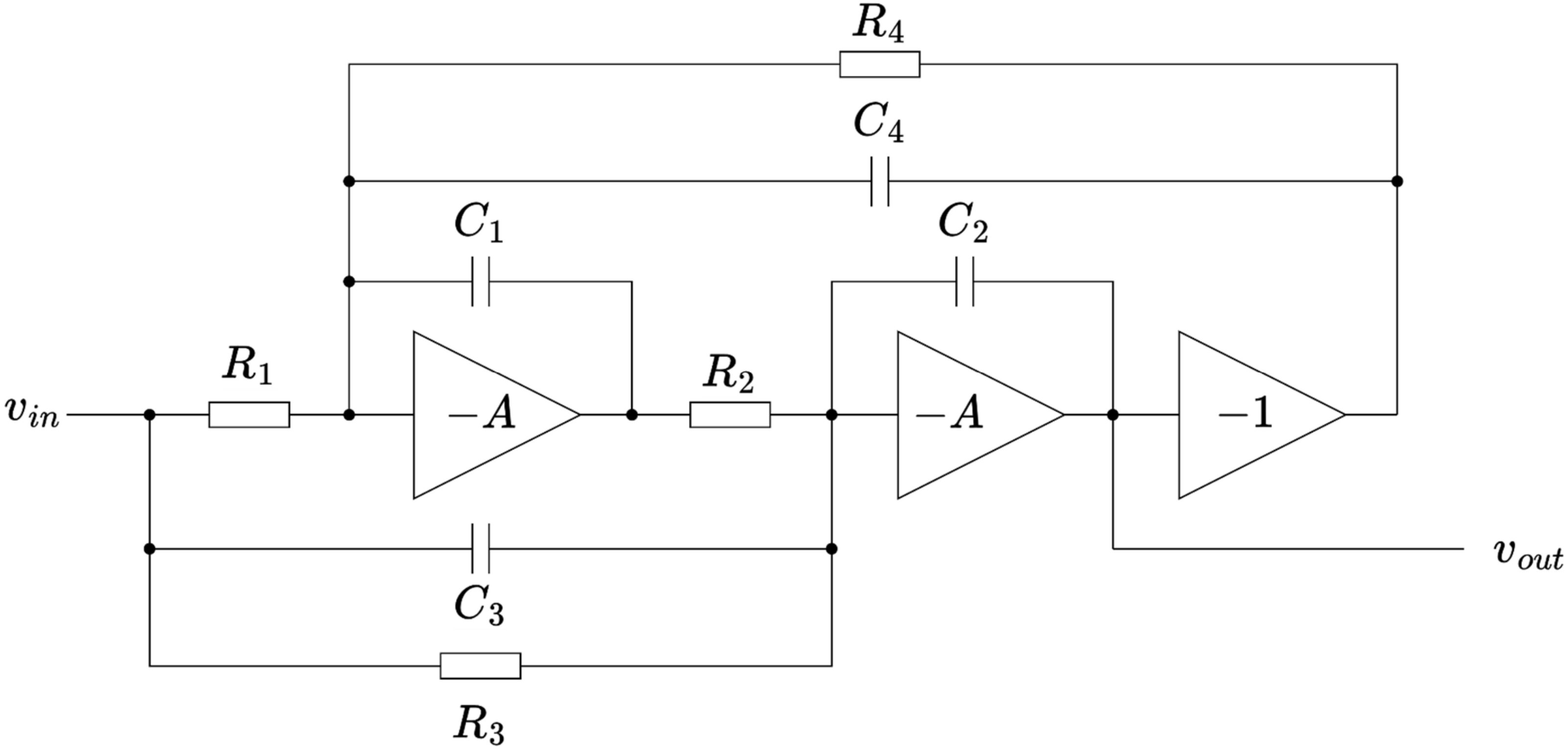
（注）2次の伝達関数のブロックダイアグラムは複数考えられる。



（参考）積分をフォーワードさせると分子の次数が上がる。

$$\frac{1}{R_2}v_1 + sC_2v_{out} + (sC_3 + \frac{1}{R_3})v_{in} = 0$$

２次伝達関数の回路



前ページのブロックダイアグラムより、

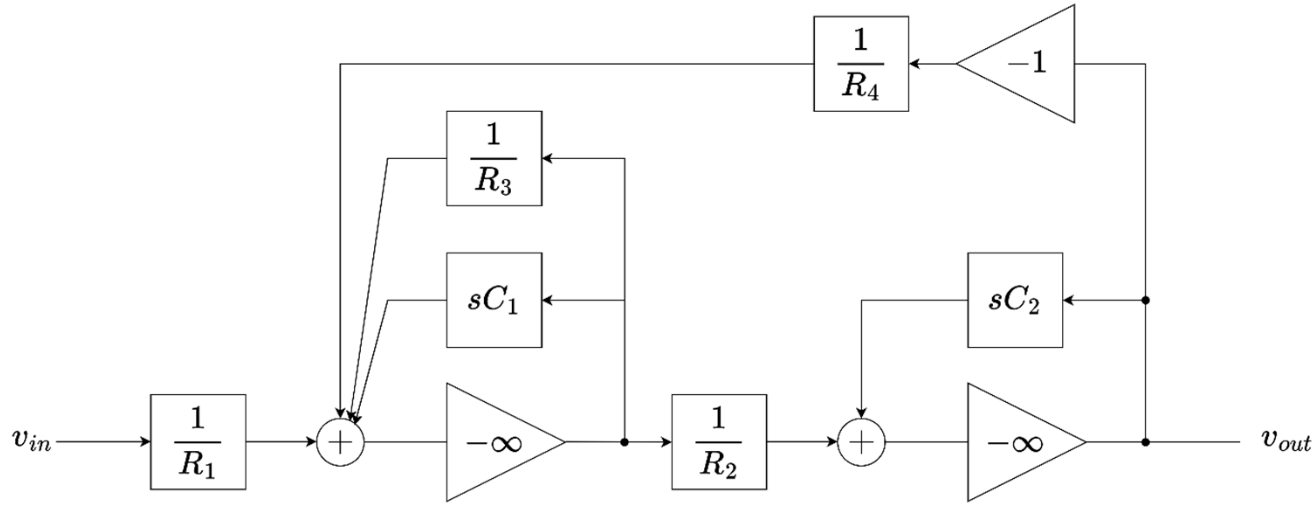
$$\begin{cases} \dfrac{1}{R_1} v_{in} + sC_1 v_1 - (sC_4 + \dfrac{1}{R_4}) v_{out} = 0 \\ \dfrac{1}{R_2} v_1 + sC_2 v_{out} + (sC_3 + \dfrac{1}{R_3}) v_{in} = 0 \end{cases}$$

⇨

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{R_4}{R_1} \frac{s^2 C_1 C_3 R_1 R_2 + sC_1 \dfrac{R_1 R_2}{R_3} - 1}{s^2 C_1 C_2 R_2 R_4 + sC_4 R_4 + 1}$$

課題7．２

1. 下記のブロックダイアグラムの伝達関数と回路図を示せ。回路図は、増幅率＝$-\infty$と増幅率＝-1の増幅器シンボルを用いて表すこと。



2. 問1の回路の直流利得G_0、遮断角周波数ω_0、Qを、$R_1, R_2, R_3, R_4, C_1, C_2$のうち必要なものを用いて表せ。
3. 以下の条件を用いて、R3, R4 を ω_0, C_1で表せ。

$$Q = \frac{1}{2}, G_0 = 1, C_1 = C_2, R_1 = R_2$$

第7章のまとめ

- 伝達関数の設計
  - 回路が、LTIシステムの条件を満足する場合、伝達関数からインパルス応答を求めることにより、任意の波形入力に対する回路の出力を求めることができる
  - フィルタの性能指標として、リプル、減衰率、群遅延などがある
  - 1次と2次の伝達関数の形により、フィルターのタイプが決定される
  - 1次、2次のフィルタを多段接続して、高次のフィルタを作ることができる
  - 次数が高いほど、大きい減衰率を実現できるが、回路規模が大きくなり消費電力が増える
- フィルタ（伝達関数）の回路実装
  - Active RCフィルタ、gm-Cフィルタ、スイッチトキャパシタフィルタなどの方式がある
  - 高利得の増幅器にNFBをかけると入力端子の電圧が0になる仮想接地が起こる
  - 仮想接地を利用して、Cと増幅器による積分回路が実現される
  - 積分器を基本として、演算レベルのブロックダイアグラムからActive RCフィルタを構成することができる