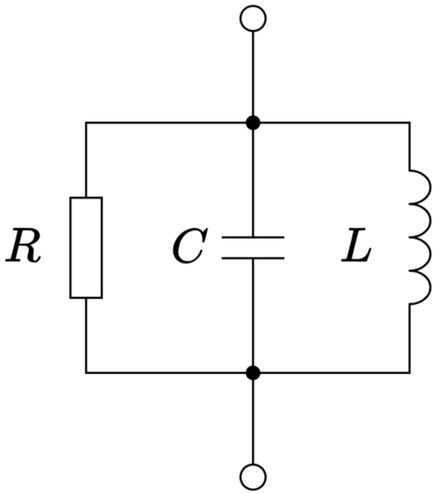
（参考）共振回路のQuality Factor

もう少し詳しく理解するために

並列共振回路のパラメータ



アドミタンス

$$Y=\frac{1}{R}+j\omega C+\frac{1}{j\omega L}=\frac{1}{R}\left\{1+jRC\left(\omega-\frac{1}{\omega LC}\right)\right\}=\frac{1}{R}\left\{1+jRC\left(\omega-\frac{\omega_r^2}{\omega}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{R}\left\{1+j\omega_r RC\left(\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega}\right)\right\}=\frac{1}{R}\left\{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega}\right)\right\}$$

共振角周波数　$\omega_r=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

Q値(Quality factor)　$Q=\omega_r RC=R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

共振特性のパラメータ

$\omega=\omega_r$　のとき、共振状態となり　$Y(\omega_r)=\dfrac{1}{R}$　（実数）

では、Q値は何を表すのか？

並列共振回路の周波数特性

$$Y=\frac{1}{R}\left\{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega}\right)\right\}$$

$$Z=\frac{1}{Y}=\frac{R}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega}\right)}$$

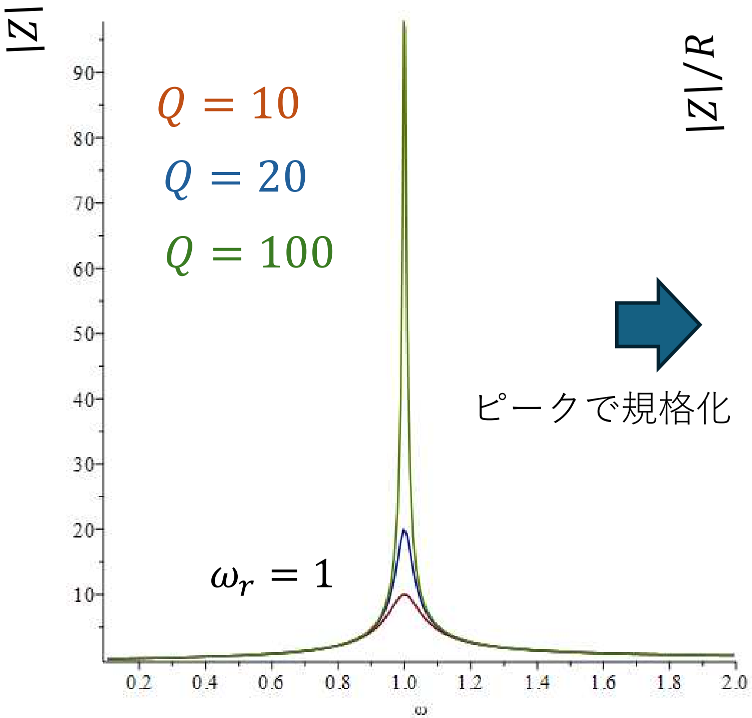
$$|Z|=\frac{R}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega}\right)^2}}$$

$\omega=0$　のとき、$|Z|=0$

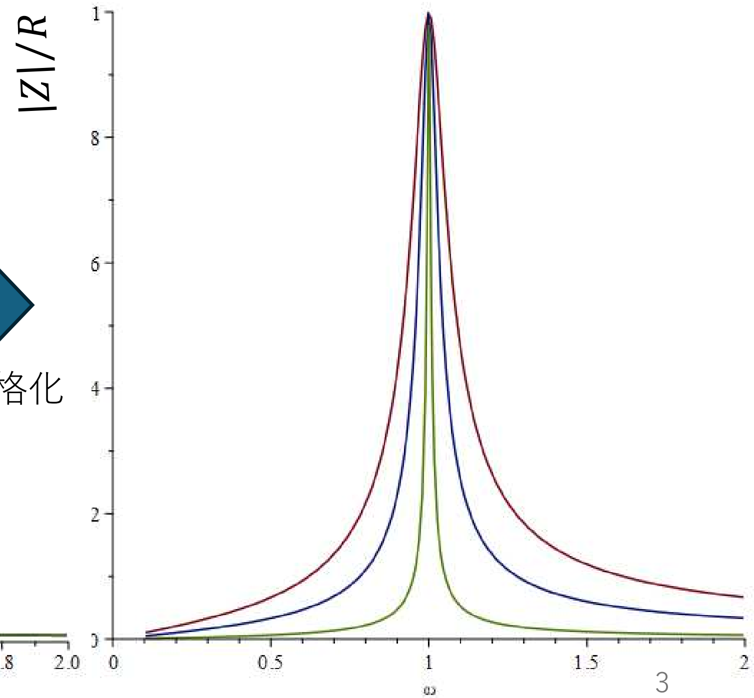
$\omega=\omega_r$ のとき、 $|Z|=R$

$\omega\to\infty$ のとき、 $|Z|=0$

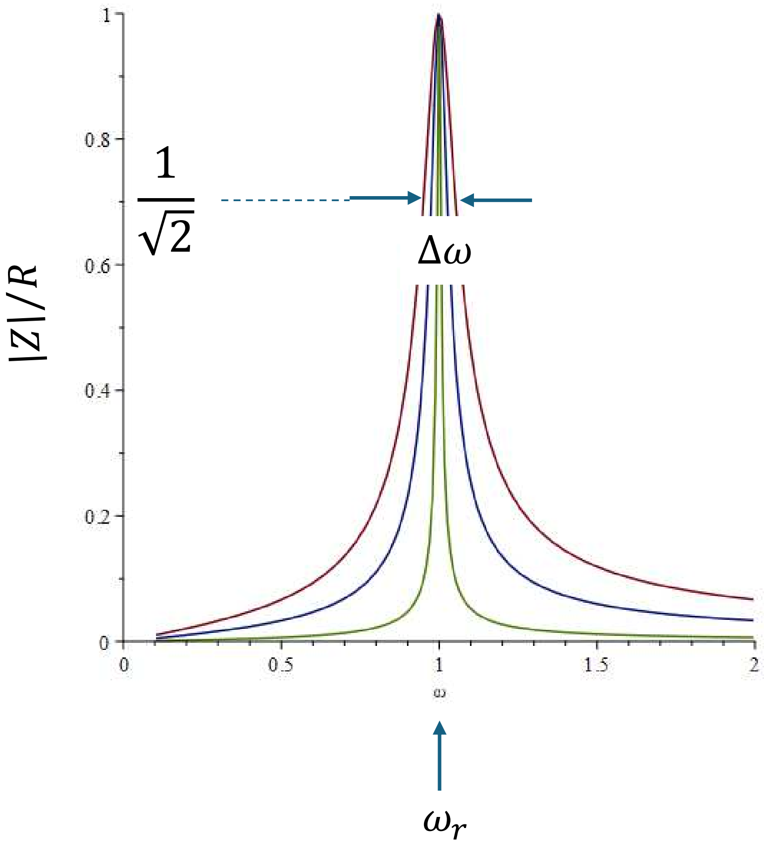
Qが大きいほどインピーダンスの絶対値の尖鋭度が強い



ピークで規格化



Q値の意味



$$|Z| = \frac{R}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)^2}}$$

$Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)^2 = 1$　のとき、$|Z| = \frac{R}{\sqrt{2}}$

この条件を満たす角周波数の差を$\Delta\omega$とするとき、

$$Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega}$$

（証明は次ページ参照）

Q値と$1/\sqrt{2}$幅の関係

$Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega}\right)^2=1$　を満たす2つの角周波数をω_1とω_2とする。

$$\begin{cases} \mathrm{Q}\left(\frac{\omega_1}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega_1}\right)=-1 & \text{(a)} \\ \mathrm{Q}\left(\frac{\omega_2}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega_2}\right)=1 & \text{(b)} \end{cases}$$

(a) + (b) より

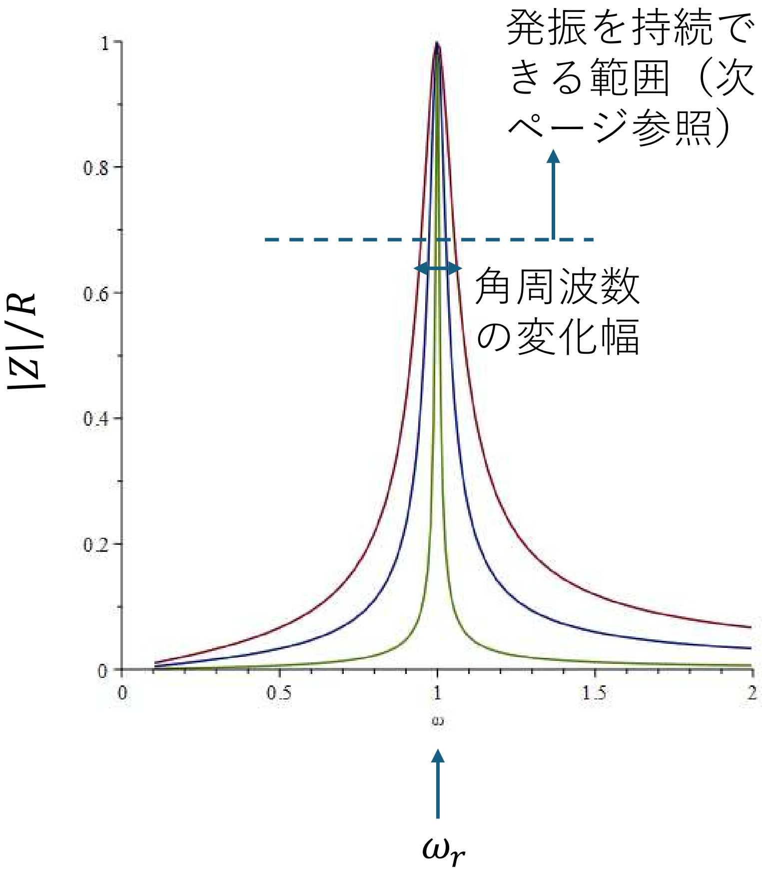
$$\mathrm{Q}\left(\frac{\omega_1}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega_1}\right)+\mathrm{Q}\left(\frac{\omega_2}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega_2}\right)=0 \longrightarrow \omega_1\omega_2=\omega_r^2$$

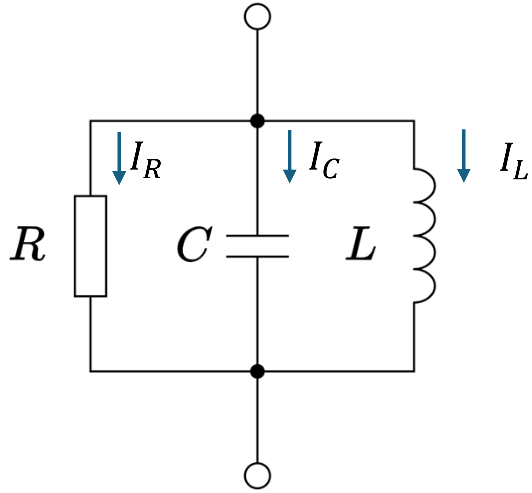
(a) - (b) より

$$\mathrm{Q}\left(\frac{\omega_1}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega_1}\right)-\mathrm{Q}\left(\frac{\omega_2}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega_2}\right)=-2 \longrightarrow \frac{1}{\omega_r}(\omega_1-\omega_2)+\omega_r\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1\omega_2}=\frac{2}{\omega_r}(\omega_1-\omega_2)=-\frac{2}{Q}$$

$$\therefore Q=\frac{\omega_r}{\omega_2-\omega_1}=\frac{\omega_r}{\Delta\omega}$$

Q値の応用上の重要性





$\omega = \omega_r$のとき、

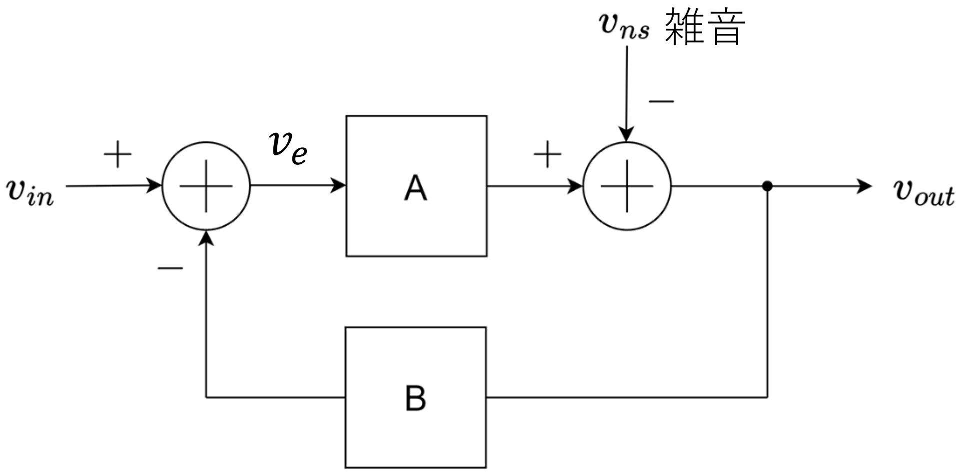
$$|I_R| = \frac{V}{R}, |I_C| = \omega_r CV, |I_L| = \frac{V}{\omega_r L}$$

$$\left|\frac{I_C}{I_R}\right| = \omega_r CR = Q$$

$$\left|\frac{I_L}{I_R}\right| = \frac{R}{\omega_r L} = \frac{\omega_r R}{\omega_r^2 L} = \omega_r CR = Q,$$

- Q値は、共振状態におけるRとLの電流比、またはRとCの電流比を表している。電力効率よく発振させるためには高Qが必要
- 一時的に発振条件を外れても、発振は持続するため$\omega = \omega_r$の近傍の角周波数が変動する。Q値が大きい（$\Delta\omega$が小さい）ほど、周波数の変動幅が狭い。

（参考）発振条件が揺らぐ原因



$AB \approx 1$であれば、 $v_{in} = 0, v_{ns} = 0$でも出力が維持される。
現実の回路では、雑音が$v_{ns} \neq 0$ であるため、
雑音の振幅と位相の変化に対して、一時的に発振周波数が変動する。

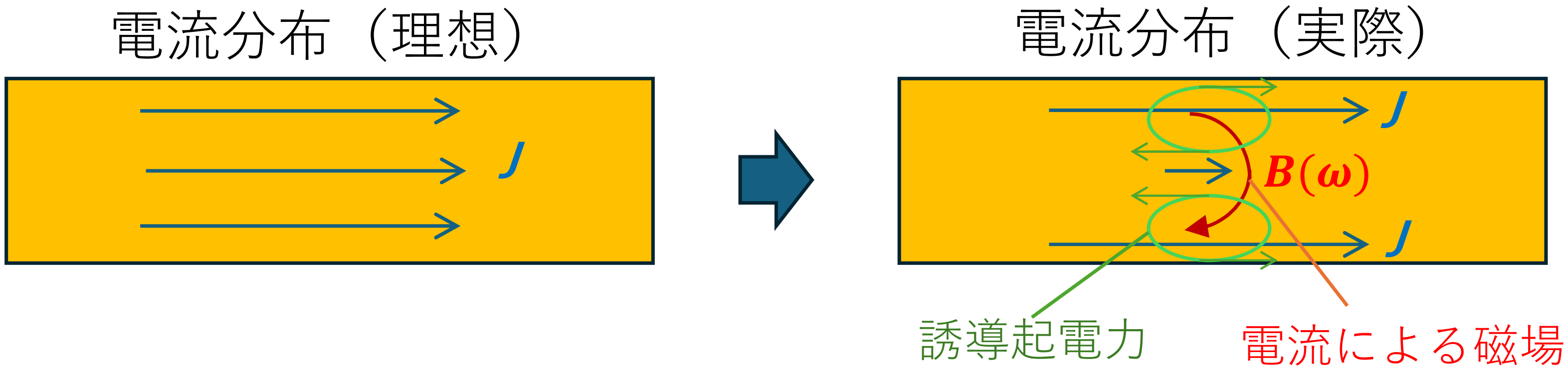
$$\begin{cases} v_{out} = Av_e + v_{ns} \\ v_e = v_{in} + Bv_{out} \end{cases}$$

$$v_{out} = \frac{A}{1-AB}v_{in} + \frac{1}{1-AB}v_{ns}$$

$v_{in} = 0$ のとき、

$$v_{out} = \frac{1}{1-AB}v_{ns}$$

配線抵抗の発生を防ぐ方法



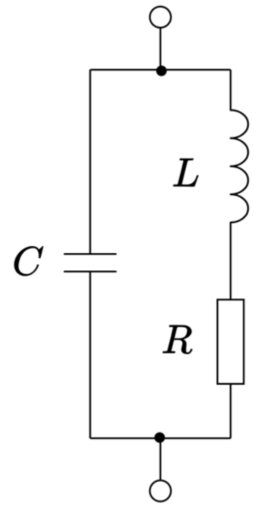
交流電流は、導線内に誘導起電力を発生させるため導線表面に集まって流れる（表皮効果）。高周波になるほど、誘導起電力が大きくなるため、表面の狭い範囲に電流が流れ、抵抗が大きくなる。

対策例

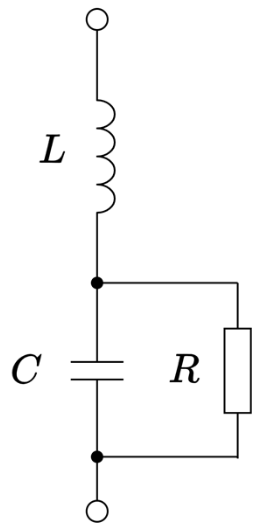
・無線通信：多数の細線を並列接続して電流が流れる表面積を増やす

・電力送電：直流送電により誘導起電力をなくす

一般的な共振回路の$\boldsymbol{\omega_r}$



(A) Qが低いインダクタ



(B) リーク電流があるキャパシタ

(A) の共振回路について解析を試みる

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\omega \frac{\omega^2 C L^2 + R^2 C - L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$= \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}\left(1 + j\omega \frac{\omega^2 L^2 C + R^2 C - L}{R}\right)$$

虚部 = 0 より共振角周波数ω_rを求める

$$R^2 C + \omega_r^2 L^2 C - L = 0$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

共振角周波数$\omega = \omega_r$におけるアドミタンス

$$Y(\omega_r) = \frac{R}{R^2 + \omega_r^2 L^2} = \frac{RC}{L}$$

一般的な共振回路の$\mathbf{Q}$の計算

一般的なRLC回路のQの計算は面倒（虚部=0と絶対値ピーク位置がずれる）。以下のようにQを定義して求める。

$$Q = \frac{\omega_r}{2}\left|\frac{\left(\frac{dY}{d\omega}\right)}{Y}\right|_{\omega=\omega_r} = \frac{\omega_r}{2}\left|\frac{\left(\frac{dZ}{d\omega}\right)}{Z}\right|_{\omega=\omega_r}$$

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right) \xrightarrow{\omega=\omega_r} \frac{RC}{L}$$

$$\frac{dY}{d\omega} = \frac{-2\omega L^2 R}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} + j\frac{2\omega L^3}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} \xrightarrow{\omega=\omega_r} \frac{-2L^2 R}{\left(\frac{L}{C}\right)^2}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} + j\frac{2L^3}{\left(\frac{L}{C}\right)^2}\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}\right)$$

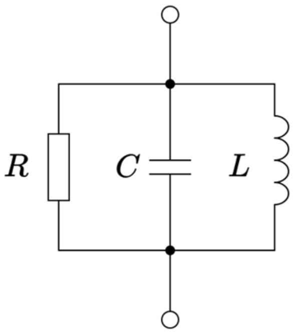
$$\left.\frac{\frac{dY}{d\omega}}{Y}\right|_{\omega=\omega_r} = -2LC\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} + j2\frac{L^2 C}{R}\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}\right) \longrightarrow \left.\frac{\left|\frac{dY}{d\omega}\right|}{|Y|}\right|_{\omega=\omega_r} = 2\sqrt{\frac{L^2}{R^2} - CL}$$

$$Q = \frac{\omega_r}{2}\left|\frac{\left(\frac{dY}{d\omega}\right)}{Y}\right|_{\omega=\omega_r} = \omega_r\sqrt{\frac{L^2}{R^2} - CL}$$

（練習問題）

RLC並列共振回路について、 $Q = \frac{\omega_r}{2}\left|\frac{\left(\frac{dY}{d\omega}\right)}{Y}\right|_{\omega=\omega_r}$

を用いてQ値を求め、スライド２の値と一致することを示せ。



$$Y = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R}\left\{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)\right\}$$